



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2021

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و امرأتان F_1 و F_2 .
نعتبر الحوادث A ، B و C حيث: A " عضوا اللجنة من نفس الجنس " .

B " عضوا اللجنة من جنسين مختلفين " .

C " H_1 عضو في اللجنة " .

1 أ. احسب $p(A)$ ، $p(B)$ احتمال A و B على الترتيب .

ب. بيّن أنّ $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

2 المتغير العشوائي X يرفق بكلّ إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة .

أ. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 2\}$.

ب. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1 الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$

من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا: $f(x) + f(-x) = 2$

2 (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 2 وأساسها $\frac{1}{3}$ ، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n عبارة S_n هي: $3 - \frac{1}{3^{n+1}}$

3 الدالة العددية g المعرفة على $[0; +\infty[$ ب: $g(x) = x + \ln(e^x + 1)$

تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا $y = 2x$ معادلة له .

4 الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = e^{3x} + \frac{1}{3}$ هي حلّ للمعادلة التفاضلية $y' - 3y = 1$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -4n + 3$

(1) بين أن المتتالية (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها r وحدّها الأول u_0 .

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -2n^2 + n + 3$

ب. عيّن قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = -30132$

(3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \ln(v_n)$

أ. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب. بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4} .

(4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n = \ln[v_0(1 - \frac{1}{2})] + \ln[v_1(1 - \frac{1}{3})] + \dots + \ln[v_n(1 - \frac{1}{n+2})]$

احسب S'_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

(1) بين أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(2) أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $0,7 < \alpha < 0,8$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 2x - 1 + \ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ. بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فيّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2 - x + 1)}$

ب. استنتج أن f متزايدة تماما على كل من $]-\infty; 0[$ و $]\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0; \alpha]$.

ج. شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ (C) ثم ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

(4) بين أن (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة 2 ثم اكتب معادلة له.

(5) بين أن (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تُحقّق: $-0,5 < \beta < -0,4$

(6) ارسم (Δ) ، (T) و المنحنى (C) . (نأخذ: $f(\alpha) \approx 0,87$)

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس، مكتوب على كلّ منها سؤال واحد، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1، 2 و 3، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1، 2، 3 و 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و 2. نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:
- A "سحب سؤال في الهندسة"، B "سحب سؤال في التحليل" و C "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا".
- احسب $p(A)$ ، $p(B)$ و $P(C)$ احتمال الحوادث A، B و C على الترتيب.
 - احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.
 - المتغير العشوائي X يرفق بكلّ بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.
 - أ. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$.
 - ب. عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.
 - ج. استنتج قيمة $E(2021X + 1442)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل.
- لتكن (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 1 و أساسها 2
 - أ. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n}$. عبارة P_n هي:
 - أ. $e^{n(n+1)}$ (ب) $e^{(n+1)^2}$ (ج) $e^{-n(n+1)}$
 - الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$. من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا:
 - أ. $f(-2-x) = f(x)$ (ب) $f(2-x) = f(x)$ (ج) $f(-x) = f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln(x+2)]$ تساوي:
 - أ. 1 (ب) $+\infty$ (ج) 0
 - (w_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما وأساسها عدد حقيقي q موجب تماما و يختلف عن 1
 - أ. نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n = \ln w_n$
 - أ. (v_n) هي متتالية:
 - أ. هندسية. (ب) حسابية. (ج) لا حسابية و لا هندسية.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{8}(u_n + 5)$
- برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n < 3$
 - بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة.

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3(3 - u_n)$

أ. احسب v_0 ثم بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$.

ب. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

ج. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (3 - u_0) \times (3 - u_1) \times \dots \times (3 - u_n)$

احسب P_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + xe^{-x-1}$ ، تمثيلها

البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل)

(1) احسب $g(-1)$.

(2) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)e^{-x-1}$

(تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$)

(1) تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x) = x[1 - (1 + \frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب. استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $[-1; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty; -1]$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

ج. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

(4) أ. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β

حيث: $0,3 < \alpha < 0,4$ و $-1,9 < \beta < -1,8$

ب. ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

(5) الدالة العددية h معرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ: $h(x) = -|x| + (|x| - 1)e^{|x|-1}$

(تمثيلها البياني في المعلم السابق).

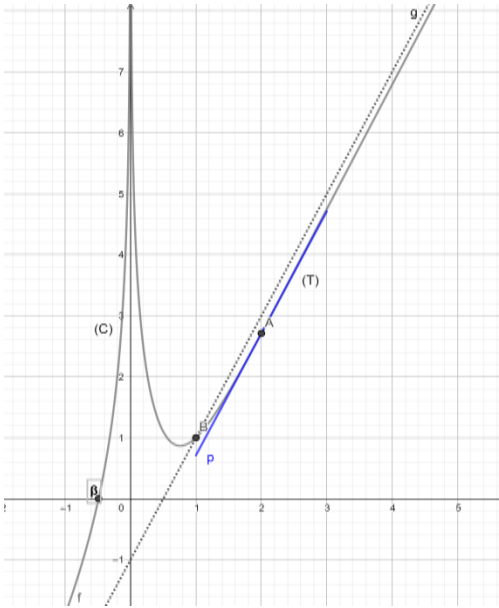
أ. بين أن الدالة h زوجية.

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2; 0]$: $h(x) = f(x)$

ج. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

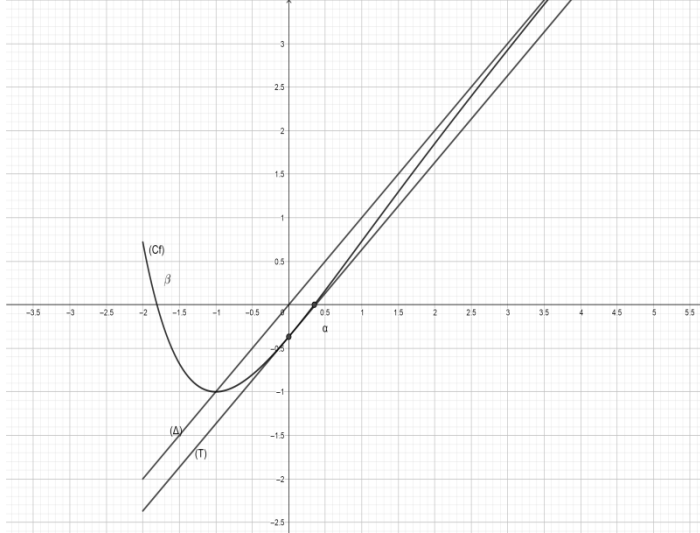
العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)								
مجموعة	مجزأة									
التمرين الأول: (04 نقاط)										
02.00	0.75+0.75	1) أ. حساب $p(A)$ ، $p(B)$: $p(B) = \frac{3}{5}$ ، $p(A) = \frac{2}{5}$ ب. تبيان أن $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$ (يمكن استعمال شجرة الامكانيات أو الجدول)								
	0.50									
02.00	0.75	2) أ. تبرير أن مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 2\}$ ب. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X <table border="1"><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$p(X = x_i)$</td><td>0.1</td><td>0.6</td><td>0.3</td></tr></table> حساب أمله الرياضي $E(X)$: $E(X) = 1.2$	x_i	0	1	2	$p(X = x_i)$	0.1	0.6	0.3
	x_i		0	1	2					
	$p(X = x_i)$		0.1	0.6	0.3					
0.75										
0.50										
التمرين الثاني: (04 نقاط)										
01.00	0,50 x 2	1.صح ، التبرير								
01.00	0,50 x 2	2.خطأ ، التبرير								
01.00	0,50 x 2	3.صح ، التبرير								
01.00	0,50 x 2	4.خطأ ، التبرير								
التمرين الثالث: (05 نقاط)										
01.00	0,25x2+0,50	1. تبيان أن المتتالية (u_n) حسابية: $r = -4$ و $u_0 = 3$								
02.00	01	2. أ. تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -2n^2 + n + 3$ ب. تعيين قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = -30132$: $n = 123$								
	01									
01.5	0.75	3. أ. كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n = e^{-4n+3}$ ب. تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}								
	0.75									
00.50	0.50	4. $S'_n = -2n^2 + n + 3 - \ln(n + 2)$								

التمرين الرابع: (07 نقاط)																	
0.50	0.25 0.25	1. أ. تبيان أنَّ الدّالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$: $g'(x) = 6x^2 - 4x + 3$ من أجل كلّ عدد حقيقي x : $g'(x) > 0$															
01.00	0.50 0.50	2. أ. تبيان أنَّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق : $0,7 < \alpha < 0,8$ g مستمرة و متزايدة تماما و $g(0.7) = -0.194$ و $g(0.8) = 0.144$ ب. إشارة $g(x)$: $g(x) > 0$ على $[\alpha; +\infty[$ و $g(x) < 0$ على $]-\infty; \alpha[$ ، $g(\alpha) = 0$															
01.25	0.50 0.25 2x0.25	1. (II) أ. تبيان أنَّ : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحني ب. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$															
01.50	0.50 0.50 0.25 0.25	2. أ. تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2 - x + 1)}$ ب. إشارة $f'(x)$: $f'(x) > 0$ على $]-\infty; 0[$ و $[\alpha; +\infty[$ و $f'(x) < 0$ على $]0; \alpha[$ $f'(x) = 0$ لَمّا $x = \alpha$ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty; 0[$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0; \alpha]$ ج. جدول تغيّرات الدّالة f <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td></td><td>- 0 +</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$f(\alpha)$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	$f'(x)$	+		- 0 +	+	$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$
x	$-\infty$	0	α	$+\infty$													
$f'(x)$	+		- 0 +	+													
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$													
01.00	0.50 0.50	3. تبيان أنَّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ (C) وضعية (C) بالنّسبة إلى (Δ) : (C) فوق (Δ) على $]-\infty; 0[$ و $]0; 1[$ (C) تحت (Δ) على $]1; +\infty[$ (C) يقطع (Δ) عند $A(1;1)$															
0.50	0.25 0.25	4. تبيان أنَّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) معادلة (T) : $y = 2x - 1 + \ln(\frac{3}{4})$															
0.50	0.50	5. تبيان أنَّ (C) يقطع حامل محور الفواصل f مستمرة و متزايدة تماما و $f(-0.4) = 0.4773$ و $f(-0.5) = -0.54$															

0.75	0.25+0.25 0.25	6. رسم (Δ)، (T) المنحنى (C). 
------	-----------------------	--

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)										
مجموعة	مجزأة											
التمرين الأول: (04 نقاط)												
01.50	0.50x3	1. حساب $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(C)$ $p(C)=\frac{2}{9}$ ، $p(B)=\frac{2}{9}$ ، $p(A)=\frac{1}{3}$										
00.50	0.50	2. احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 هو : $\frac{2}{3}$										
02.00	0.50	3. أ. تبرير أنّ مجموعة قيم X هي $\{1; 2; 3; 4\}$										
	0.25x4	ب. تعيين قانون احتمال X :										
	0.25	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>$\frac{3}{9}$</td><td>$\frac{3}{9}$</td><td>$\frac{2}{9}$</td><td>$\frac{1}{9}$</td></tr></table> حساب $E(X) = \frac{19}{9}$.	x_i	1	2	3	4	$P(X = x_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
	x_i	1	2	3	4							
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$								
0.25	ج. استنتاج : $E(2021X + 1442) = 2021E(X) + 1442 = 5708.55$											
التمرين الثاني: (04 نقاط)												
04.00	0.50x2	1. الجواب الصحيح هو (ب) ، التبرير										
	0.50x2	2. الجواب الصحيح هو (أ) ، التبرير										
	0.50x2	3. الجواب الصحيح هو (ج) ، التبرير										
	0.50x2	4. الجواب الصحيح هو (ب) ، التبرير										
التمرين الثالث: (05 نقاط)												
0.75	0.5+0.25	1. البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n < 3$										
01.25	0.25+0.50	2. تبيان أنّ (u_n) متزايدة تماما : $u_{n+1} - u_n = -\frac{5}{8}(u_n - 3)$										
	0.50	استنتاج أنّها متقاربة										
02.50	0.25	3. أ. $v_0 = 9$										
	0.75	تبين أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$: $v_{n+1} = v_n \times \frac{3}{8}$										
	0.50	ب. عبارة الحد العام v_n : $v_n = 9\left(\frac{3}{8}\right)^n$										
	0.75	استنتاج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$										
	0.25	ج. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$										
00.50	0.50	4. $P_n = 3^{n+1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$										

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)												
مجموعة	مجزأة													
التمرين الرابع: (07 نقاط)														
0.25	0.25	(I) 1. $g(-1) = 0$												
0.50	0.50	2. إشارة $g(x)$: لما $x \in]-\infty; -1[$ فان $g(x) < 0$. لما $x \in]-1; +\infty[$ فان $g(x) > 0$. $g(-1) = 0$												
0.75	0.25 0.25x2	(II) 1.التحقق: $f(x) = x[1 - (1 + \frac{1}{x})e^{-x-1}]$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$												
01.00	0. 25 0. 25 0.50	2. أ. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : f'(x) = g(x)$ ب. f متزايدة تماما على $[-1; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty; -1]$ جدول تغيراتها <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	$f'(x)$	$-$	0	$+$	$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$
	x	$-\infty$	-1	$+\infty$										
$f'(x)$	$-$	0	$+$											
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$											
01.75	0.25 0.25 0. 5 0,25 0,25 0,25	3. أ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) ب. وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : لما $x \in]-\infty; -1[$ فان (C_f) يقع فوق (Δ) . لما $x \in]-1; +\infty[$ فان (C_f) يقع تحت (Δ) . (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1; -1)$ ج. تبين أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) $f'(x) = 1$ $f'(x) = 1$ تكافئ $x = -1$ كتابة معادلة (T) : $y = x - e^{-1}$												

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموعة	مجزأة	
01.50	0.25	4. أ. تبيان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين f مستمرة و متناقصة تماما و $f(-1.9)=0.3136$ و $f(-1.8)=-0.01956$ f مستمرة و متزايدة تماما و $f(0.3)=-0.054$ و $f(0.4)=0.05476$ ب. رسم (Δ) و (T)
	0.25	
	0.25x2	
	0.50	
		 رسم (C_f)
01.25	0.25	5. أ. تبيان أن الدالة h زوجية ب. تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$ $h(x) = f(x)$ ج. شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)
	0.25	
	0.25	
	0.50	
		رسم (C_h)