



دورة: 2022

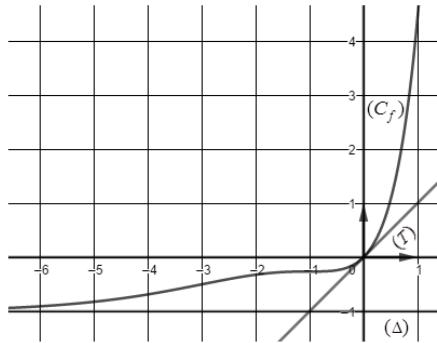
المدة: 03 س و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)



f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بتمثيلها البياني (C_f) في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتاجنس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)، (T) مماس (C_f)

في النقطة ذات الفاصلة 0 كما هو مبين في الشكل المقابل.

(1) بقراءة بيانية: عين $(0)f'$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وأعط معادلة للمماس (T)

(2) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة:

$f(x) = x + m$ إذا علمت أن $a = -1$ و $b = 1$

(3) بين أن $a = 1$ و $b = -1$ وبين أن $f(x) = (x^2 + a)e^x + b$ تمثلها البياني في المعلم السابق.

(4) g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = (x^2 + 1)e^{|x|}$ وبين أن g زوجية ثم اشرح كيفية إنشاء (C_g) انتلافاً من (C_f) وأنشئ (C_g)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب ب صحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

(1) f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty)$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 - x + \ln x}{x}$

$y = x - 1$ هي معادلة للمسقطيم المقارب المائل لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

(2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x : $\ln(2x-1) + \ln(2x+1) = \ln 3$... (E)

للمعادلة (E) حلان متمايزان في \mathbb{R}

(3) f و F الدالتان العدديتان المعرفتان على \mathbb{R} بـ: $F(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ و $f(x) = \ln(1 + e^{-2x})$

F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

(4) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي:

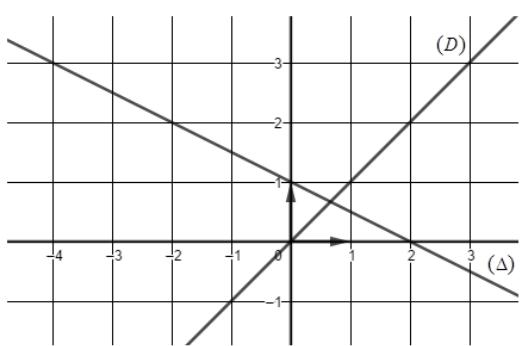
قيمة المجموع : $\ln 2022 = \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_{2022}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتاجنس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) و (D) و (Δ) المستقيمان المعرفان كما يلي :

• (Δ): $y = -\frac{1}{2}x + 1$ و (D): $y = x$

المتتالية العددية (u_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $u_0 = -4$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$



1) أُنْقل الشكل المُقَابِل على ورقة الإجابة ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل.

أ- هل المتتالية (u_n) رتيبة؟ بـرر إجابتك.

ب- ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n)

3) $v_n = \left(u_n - \frac{2}{3} \right)^2$: المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ:

أ- بين أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم احسب v_0

ب- عُبّر عن v_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ واستنتج أنّ (u_n) متقاربة.

4) بين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ،

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) $g(x) = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2} + \ln x$: بـ $[0; +\infty]$

1) بين أنّ الدالة g متزايدة تماما على $[0; +\infty]$

2) أ- بين أنّ المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلّاً وحيداً α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty]$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0; +\infty]$ بـ:

تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (C_f)

1) أ- بين أنّ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- فسر النتائجتين السابقتين ببيانها.

2) أ- بين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما ،

ب- استنتاج اتجاه تغيير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

(3) أنشئ المنحنى (C_f) . (نأخذ: $f(0,65) \approx 0$ و $f(0,6) \approx -0,4$)

(4) $F(x) = e^{-x}(2 + \ln x)$: بـ $[0; +\infty]$ الدالة العددية المعرفة على

أ- تحقق أنّ الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $[0; +\infty]$

ب- نضع $\int_{\lambda}^{1/2} f(x) dx = S(\lambda)$ حيث λ عدد حقيقي يتحقق:

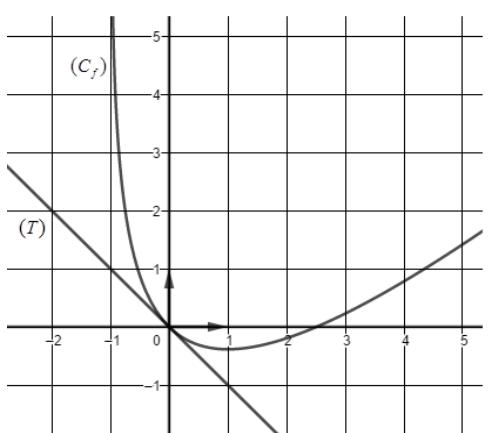
احسب $S(\lambda)$ ثم فسر النتيجة ببيانها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (40 نقاط)

الدالة العددية المعرفة على $[-1; +\infty)$ بـ: $f(x) = ax - 2\ln(x+1)$ حيث a عدد حقيقي. تمثيلها

البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتاجنس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 كما هو مبين في الشكل المقابل.



(1) بقراءة بيانية، عين $f'(0)$ وأعط معادلة للمماس (T)

(2) بين أن $a = 1$

(3) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة

حلول المعادلة: $f(x) + x - m = 0$

(4) $g(x) = |x+1| - 1 - 2\ln|x+1|$ تمثيلها البياني.

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x مختلف عن -1 ، $g(-2-x) = g(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[-1; +\infty)$ من

ج- أنشئ (C_g) في المعلم السابق.

التمرين الثاني: (40 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) قيمة العدد الحقيقي I حيث $I = \int_{-1}^2 (x-1)e^{x^2-2x} dx$ هي:

$\frac{e+1}{2e}$ (ج)

$\frac{e-1}{2e}$ (ب)

$1 - \frac{1}{e}$ (أ)

(2) (u_n) و (v_n) المتاليتان العدديتان المعرفتان على \mathbb{N} بـ: $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + 3$ ، $u_0 = 3$ ، $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي.

قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتالية (v_n) هندسية هي:

$\frac{2}{9}$ (ج)

$\frac{9}{2}$ (ب)

$-\frac{9}{2}$ (أ)

(3) دالة عددية تتحقق، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $\ln(x+1) \leq f(x) \leq e^x - 1$

هي: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

1 (ج)

-1 (ب)

$+\infty$ (أ)

(4) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) : $y'' = 2 - \frac{1}{x^2}$ (E)

عبارة الحل H للمعادلة (E) على $[0; +\infty)$ والذي يتحقق $H(1) = 4$ و $H'(1) = 2$ هي :

$H(x) = x^2 - x + 4 - \ln x$ (ج) $H(x) = x^2 - x + 1 + \ln x$ (ب) $H(x) = x^2 - x + 4 + \ln x$ (أ)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتالية الهندسية المعروفة على \mathbb{N} وحدودها موجبة تماماً حيث:

$$\begin{cases} u_0 \times u_2 = e^2 \\ \ln u_1 + \ln u_7 = -4 \end{cases}$$

أ- عين u_1 والأساس q للمتالية (u_n)

ب- تحقق أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n ،

(2) احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث:

(3) نعتبر المتالية العددية (v_n) المعروفة بـ: $v_0 = e^3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ،

$$v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$$

أ- برهن بالترافق أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n ،

ب- بين أن (v_n) متقاربة.

(4) أ- بين أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n ،

ب- نعتبر المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = \frac{1}{1-e} \left[S_n - (n+1)e^3 \right]$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية المعروفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{9}{2}e^{-x} - 2x + 4$ تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $f(x)$ وبيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

أ- أثبت أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x ،

ب- بيّن أن f متاقضة تماماً على كلّ من المجالين $[-\infty; -\ln 4]$ و $[\ln 2; +\infty]$ ثم شّكل جدول تغييراتها.

أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -2x + 4$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

(4) أكتب معادلة L (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

(5) أنشئ (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1,9; +\infty)$ (نأخذ $f(-1,9) \simeq -3,2$ و $f(+\infty) \simeq -3,9$)

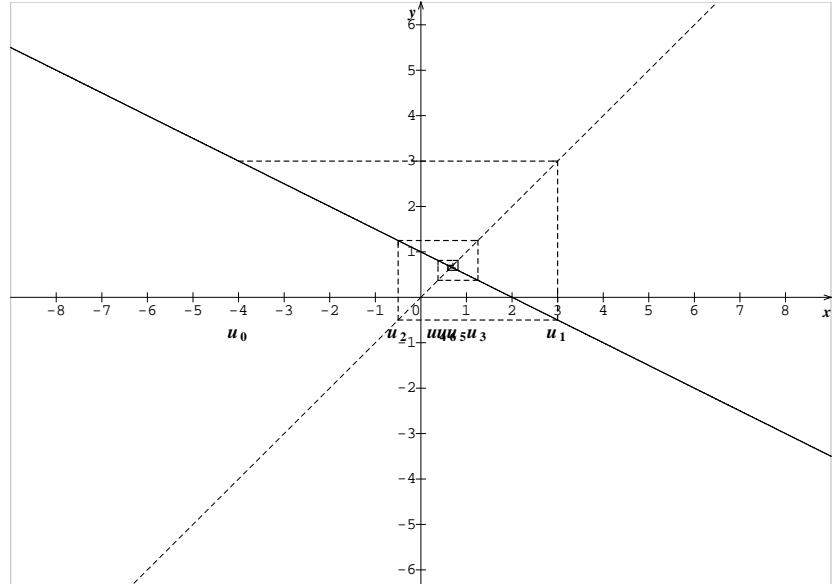
(6) h الدالة المعروفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{9}{2}e^{-x} + 2x - 2$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث، من أجل كلّ عدد حقيقي x ،

ب- اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) اعتماداً على (C_f) لا يطلب إنشاء (C_h)

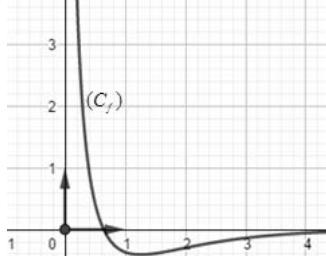
العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
01	0.25	$f'(0) = 1$
	0.25	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
	0.5	$(T) : y = x$
0.75	0.25×3	<p>المعادلة لا تقبل حلا $m < 0$</p> <p>المعادلة تقبل حلين متمايزين $m > 0$</p> <p>المعادلة تقبل حلا معدوما $m = 0$</p>
01	0.5+0.5	<p>تبين أن $a = 1$ $b = -1$</p> $f'(x) = (x^2 + 2x + a)e^x$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ معناه} \begin{cases} f'(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \end{cases}$
1.25	0.50 0.25 0.5	<p>الدالة g زوجية</p> $g(x) = f(x) \quad x \in [0; +\infty[$ <p>(C_g) ينطبق على (C_f) في المجال $[0; +\infty[$ و (C_g) متاظر بالنسبة لحامل محور الفواصل</p>
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
01	0.50 0.50	صحيحة لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$ (1)
01	0.50 0.50	خاطئة لأن: أي $x = 1$ معناه $\begin{cases} x^2 = 1 \\ x > 1/2 \end{cases}$ (2)
01	0.50 0.50	صحيحة لأن: من أجل كل x من \mathbb{R} $F'(x) = f(x)$ (3)
01	0.50 0.50	خاطئة لأن $\ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_{2022} = \ln \frac{2 \times 3 \times \dots \times 2023}{1 \times 2 \times \dots \times 2022} = \ln 2023$ (4)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

01	0.25×4	<p>تمثيل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و</p> 	(1)
01	0.25	أ - (u_n) ليست رتيبة	
	0.50	البرهان: $u_1 > u_2$ و $u_0 < u_1$	
	0.25	ب - التخمين : (u_n) متقاربة	
2.75	01	$v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$ - أ $v_0 = \frac{196}{9}$	
	0.50	$v_n = \frac{196}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ - ب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$	
	0.50		
	0.25	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$	
0.25	0.25	<p>تبين أن:</p> $v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \left(\frac{196}{9}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+2+\dots+n-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$ <p>تمنح العلامة 0.25 لكل محاولة</p>	
	0.25		

التمرين الرابع: (07 نقاط)

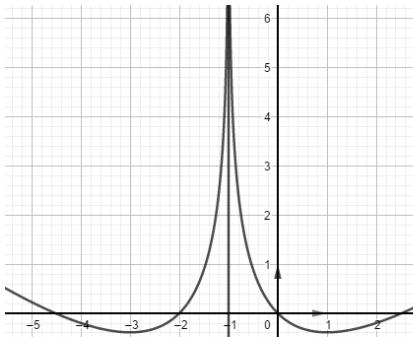
(I)

1.25	0.50 0.50 0.25	$g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$ $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$	(1)
1.25	0.75	أ-حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $1.2 < \alpha < 1.3$	(2)
	0.50	ب-اشارة $g(x)$	
01	0.25 0.25	$\begin{array}{ c c c c } \hline x & 0 & a & +\infty \\ \hline g(x) & - & 0 & + \\ \hline \end{array}$	(1)
	0.25×2	أ-تبين أن $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{xe^x} - \frac{2}{e^x} - \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x} \right]$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ب-التقسيير البياني معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) $x = 0$; $y = 0$	
1.75	0.75	$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$	(2)
	0.25×2	ب-اتجاه تغير الدالة f f متزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0; \alpha]$ جدول تغيراتها.	
0.50	0.5	$\begin{array}{ c c c c } \hline x & 0 & \alpha & +\infty \\ \hline f'(x) & - & 0 & + \\ \hline f(x) & +\infty & f(\alpha) & 0 \\ \hline \end{array}$	
	0.5		(3)
1.25	0.5	أ-التحقق: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ $F'(x) = f(x)$	(4)

	0.5 0.25	$S(\lambda) = [F(x)]_{\lambda}^{0.5} = \frac{2 - \ln 2}{\sqrt{e}} - \frac{2 + \ln \lambda}{e^{\lambda}}$ <p>التقسيـر: $S(\lambda)$ مسـاحة الحـيز من المـستـوي المـحدـد بـ (C_f) وـحامـل محـور الفـواصـل والـمـسـتـقـيـن ذـي الـمـعـادـلـيـن λ وـ $x = \frac{1}{2}$ ، $x = \lambda$</p>	
--	-------------	---	--

عـاـصـرـاـتـ الـإـجـابـةـ (ـالـمـوـضـوـعـ الثـانـيـ)

الـتـمـرـينـ الـأـوـلـ (ـ04ـ نـقـاطـ)

01.25	0.50 0.75	$f'(0) = -1$ $(T): y = -x$	(1)
0.50	0.50	$a = 1$ و منه $\begin{cases} f'(x) = a - \frac{2}{x+1} : a = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases}$	(2)
0.75	0.25×3	المناقـشـةـ الـبـيـانـيـةـ: المـعـادـلـةـ لاـ تـقـبـلـ حـلـاـ $m < 0$ لـمـعـادـلـةـ حـلـاـ مـعـدـوـمـاـ $m = 0$ لـمـعـادـلـةـ حـلـيـنـ مـخـتـفـيـنـ فـيـ الإـشـارـةـ $m > 0$	(3)
1.50	0.50 0.25	أـ تـبـيـانـ أـنـ:ـ مـنـ أـجـلـ كـلـ $g(-2-x) = g(x)$ $(-2-x) \in D_g$ ، $x \in D_g$ التـقـسـيـرـ الـبـيـانـيـ:ـ $x = -1$ مـعـادـلـةـ مـحـورـ تـنـاظـرـ (C_g)	(4)
	0.25	بـ تـبـيـانـ أـنـ:ـ $g(x) = f(x)$ عـلـىـ $[-1; +\infty]$	
	0.50	 <p>جـ اـنـشـاءـ (C_g)</p>	

الـتـمـرـينـ الثـانـيـ (ـ04ـ نـقـاطـ)

01	0.50 0.50	$I = \int_{-1}^2 (x-1)e^{x^2-2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2-2x} \right]_{-1}^2$ <p>الـاقـتـراـحـ الصـحـيـحـ هـوـ بـ) لأنـ $\int (x-1)e^{x^2-2x} dx = \frac{1}{2} e^{x^2-2x}$</p>	(1)
01	0.50 0.50	$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}\alpha + 3$ <p>الـاقـتـراـحـ الصـحـيـحـ هـوـ أـ) لأنـ $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}\alpha + 3$</p>	(2)

01	0.50 0.50	الاقتراح الصحيح هو ج) لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)}{x} = 1$	(3)
01	0.50 0.50	الاقتراح الصحيح هو أ) لأن: $H'(x) = 2x + \frac{1}{x} + c$ و $H(x) = x^2 + \ln x + cx + d$ $H(x) = x^2 - x + 4 + \ln x \quad \begin{cases} H'(1) = 2 \\ H(1) = 4 \end{cases}$	(4)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

01.50	0.50 0.50	$u_1 = e - 1$ $q = \frac{1}{e}$	(1)
	0.50	ب- التحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ,	
01	0.50 0.50	$S_n = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ $S_n = \frac{e^3}{e - 1} \left(1 - \frac{1}{e^{n+1}} \right)$	(2)
	0.75+0.25	$v_n = \frac{e^{3-n} - e^4}{1 - e}$: أ- البرهان بالترّاجع :	
1.50	0.50	ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3-n} - e^4}{1 - e} = \frac{e^4}{-1 + e}$	(3)
	0.50	ا- تبيّان أن $\frac{1}{e} v_n = \frac{1}{1 - e} (u_n - e^3)$	
01	0.50	ب- التتحقق أن $S'_n = \frac{1}{1 - e} [S_n - (n+1)e^3]$	(4)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

0.75	0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	(1)													
	0.50	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{-2x} (1 - 9e^x - 4xe^{2x} + 8e^{2x}) = +\infty$														
1.75	0.75	أ- إثبات أن $f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} (e^x - 2)(4e^x - 1)$:	(2)													
	0.50	ب- اتجاه التغيير														
1.75	0.50	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-ln4$</td> <td>$ln2$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> </table> جدول التغيرات	x	$-\infty$	$-ln4$	$ln2$	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	0				
x	$-\infty$	$-ln4$	$ln2$	$+\infty$												
$f'(x)$	-	0	+	0												
0.50	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-Ln4$</td> <td>$Ln2$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$\frac{15}{8} - 2Ln2$</td> <td>$-6 + 4Ln2$</td> <td>$-\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-Ln4$	$Ln2$	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	0	$f(x)$	$+\infty$	$\frac{15}{8} - 2Ln2$	$-6 + 4Ln2$	$-\infty$
x	$-\infty$	$-Ln4$	$Ln2$	$+\infty$												
$f'(x)$	-	0	+	0												
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{15}{8} - 2Ln2$	$-6 + 4Ln2$	$-\infty$												

	0.25	$f(x) - (-2x + 4) = \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{9}{2}e^{-x} - 1$	(3)
	0.50	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-2x + 4)) = 0$	
1.50	0.25	ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) $f(x) - (-2x + 4) = \frac{1}{2}e^{-x}(e^{-x} - 9)$ $[-\ln 9; +\infty[$ على المجال (C_f) $]-\infty; -\ln 9[$ على المجال (C_f) $(C_f) \cap (\Delta) = \{A(-\ln 9; 4 + 2\ln 9)\}$	
	0.50		
	0.75	$(T): y = \frac{3}{2}x$	(4)
1.50	0.50	إنشاء (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1, 9; +\infty[$	(5)
	0.50		
	0.50		
0.75	0.25	$a = -1$	(6)
	0.25	$b = 2$	
	0.25	$h(x) = -f(x) + 2$ ننشئ (C_{-f}) صورة (C_f) بالتناظر بالنسبة لحامل محور الفواصل ثم $2\vec{j}$ صورة (C_h) بالاتسحاب ذو الشعاع	