الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبي — ثانوية أوبينياتر الخاصة

الشعبة: تقني رياضي — دورة: مـــــاي 2025

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: أربع ساعات ونصف

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

يُراد عشوائيا تشكيل لجنة تضمّ رئيسا، نائبا له وكاتباً، من بين خمسة رجال أحدهم اسمه عُمر، وأربع نساء.

1. أُحسب احتمال كلّ حدث من الأحداث الآتية
   أ. A: " أعضاء اللّجنة من نفس الجنس ".
   ب. B: " عُمر كاتباً للجنة ".
   ج. C: " عُمر عضو في اللّجنة ".
2. بيّن أنّ $P(A\cap B)=\dfrac{1}{42}$ ، ثمّ استنتج $P(A\cup B)$
3. نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق بكل لجنة عدد الرّجال فيها.
   أ. بيّن أنّ $P(X=1)=\dfrac{5}{14}$ و $P(X=2)=\dfrac{10}{21}$
   ب. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ استنتج أمله الرياضياتي $E(X)$
   ج. أُحسب احتمال الحدث $(\log X>0)$

التمرين الثاني (4 ن)

1. أ. أُدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13
   ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left(3^{1962}\right)^{2025}$ على 13
2. بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، العدد $7\times 42^{3n}-2\times 55^{3n+1}+1962$ مضاعف لـ 13
3. عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقّق $n^2+29^{3n+1}\times 2n+16^{3n+2}\equiv 0\,[13]$
4. عيّن كلّ الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقّق ما يلي

$$\begin{cases} 3^x+3^y\equiv 5\,[13] \\ x<y<11 \\ PGCD(x;y)=1 \end{cases}$$

التمرين الثالث (5 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 5 - \dfrac{18}{U_n + 4} \end{cases}$$

I) 1. برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $U_n > 2$

2. أُدرس اتجاه تغيّر (U_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (V_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}$

1. بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ثمّ أُكتب عبارة V_n بدلالة n

2. بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n = \dfrac{2 + V_n}{1 - V_n}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3. أ. أُحسب بدلالة n المجموع S حيث $S = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$

ب. استنتج بدلالة n عبارة المجموع T حيث $T = \dfrac{3U_0}{U_0+1} + \dfrac{3U_1}{U_1+1} + \ldots + \dfrac{3U_n}{U_n+1}$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الجدول المقابل هو جدول تغيّرات الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = (x+1)\,e^{-x} + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘ 1

1. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّاً وحيدا α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$

2. حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = \dfrac{3x}{1 + e^{-x}}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وفسّر النتيجة هندسيا، ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{3\,g(x)}{(1+e^{-x})^2}$

ج. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أنّ $f(\alpha) = -3e^{\alpha}$ ثمّ استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$

3. أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب. أُدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

4. أ. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة O

ب. أنشئ كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f)

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$

5. الدّالة العددية h معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x)=\dfrac{3\,(2-x)\,e^2}{e^x+e^2}$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)=f\,(2-x)$

ب. اشرح كيفية إنشاء المنحنى الممثّل للدّالة h انطلاقا من (C_f). (لا يُطلب الإنشاء)

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

كيس به 7 كريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللّمس، منها ثلاث كريّات بيضاء تحمل الأرقام: 0 ، 0 و 2 ، كريتين خضراوين تحملان الرقين: 2 و 5 ، كريتين حمراوين تحملان الرقين 0 و 5

نسحب عشوائيا من الكيس أربع كريّات في آن واحد، ونعتبر الحدثين الآتيين.

- A: " الحصول على أربعة أرقام تُشكّل العدد 2025 ".
- B: " الحصول على كريتين من نفس اللّون بالضبط ".

I) **1.** بيّن أنّ $P(A)=\dfrac{6}{35}$ و $P(B)=\dfrac{24}{35}$

2. أُحسب $P(A\cap B)$

II) نضيف إلى الكيس k كريّة تحمل العدد 2 حيث $k\in\mathbb{N}^*$ ، ونسحب عشوائيا من الكيس كريّتين على التوالي دون إرجاع، ونعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يُرفق كل إمكانية بعدد مرّات ظهور الرقم 2

1. أ. عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

ب. استنتج أنّ $E(X)=\dfrac{2k+4}{k+7}$

2. عيّن أصغر قيمة ممكنة للعدد k حتّى يكون $E(X)>1$

التمرين الثاني (4 ن)

من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ نضع : $P(z)=z^4+z^3-z^2+z-2$

I) **1.** بيّن أنّه من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ ، $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$

2. حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أنها تقبل حلّا تخيّليا صرفا.

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A=i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=|z_A|$

1. بيّن أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2. أ. أُكتب العدد المركّب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشّكل الجبري.

ب. استنتج طبيعة المثلّث ABC

التمرين الثالث (5 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) المعرّفة كما يلي $(E): 1962x-977y=8$

1. أ. بيّن أنّ العدد 977 أوّلي ثمّ استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. عيّن الحلّ الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقّق $x_0+5y_0=11$

ج. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E)

2. نعتبر L عددا طبيعيا يكتب $\overline{\alpha\gamma\gamma\beta\beta\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 حيث α ، β و γ تشكّل بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية والثنائية $(\alpha;\beta)$ حلّ للمعادلة (E)

- عيّن كلّا من α ، β و γ ثمّ أُكتب L في النظام العشري.

3. حلّل العدد 2025 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتج قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $2025 \equiv 0\,[n^3]$

4. نضع : $PGCD\,(a;b) = d$ و $PPCM\,(a;b) = m$ حيث $(a;b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

- عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ حيث $a > b$ و التي تحقّق

$$\begin{cases} m = 6d \\ a^3 + b^4 = 2025 \end{cases}$$

التمرين الرّابع (7 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x\ln x - 1$

1. شكّل جدول تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$

ب. استنتج حسب قيم x من $]0;+\infty[$ إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = (x-1)(\ln x - 1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $||\vec{j}|| = 1cm$

1. أ. أُحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

ج. بيّن أنّ f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2. أ. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

ب. أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

3. أ. أنشئ كُلّا من (T) و (C_f). (تُعطى: $f(\alpha) \approx -0,33$).

ب. باستخدام (C_f) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

4. نعتبر λ عددا حقيقيا حيث $0 < \lambda < 1$

أ. أُكتب بدلالة λ العدد $\mathcal{A}(\lambda)$ المعرّف بـ : $\mathcal{A}(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{1} [f(x) + x - 1]\,dx$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. أُحسب $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} \mathcal{A}(\lambda)$

5. المتتالية العددية (ω_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\omega_n = 1 - \dfrac{f(e^{-n})}{n+1}$

- أُحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (٤ ن)

1. حساب احتمال كلّ حدث من الأحداث A ، B و C

أ. A: " أعضاء اللّجنة من نفس الجنس ".

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد الإمكانيات}} = \frac{A_5^3 + A_4^3}{A_9^3} = \frac{84}{504} = \frac{1}{6}$$

ب. B: " عُمر كاتباً للجنة ".

$$P(B) = \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد الإمكانيات}} = \frac{A_1^1 \times A_8^2}{A_9^3} = \frac{56}{504} = \frac{1}{9}$$

ج. C: " عُمر عضو في اللّجنة ".

$$P(C) = \frac{\text{عدد عناصر } C}{\text{عدد الإمكانيات}} = \frac{3A_1^1 \times A_8^2}{A_9^3} = \frac{168}{504} = \frac{1}{3}$$

2. تبيين أنّ $P(A \cap B) = \frac{1}{42}$ ، ثمّ استنتاج $P(A \cup B)$

$$P(A \cap B) = \frac{A_1^1 \times A_4^2}{A_9^3} = \frac{12}{504} = \frac{1}{42}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{42} = \frac{16}{63}$$

3. أ. تبيين أنّ $P(X=1)=\frac{5}{14}$ و $P(X=2)=\frac{10}{21}$

$$P(X=1)=\frac{3A_5^1\times A_4^2}{A_9^3}=\frac{180}{504}=\frac{5}{14}$$

$$P(X=2)=\frac{3A_4^1\times A_5^2}{A_9^3}=\frac{240}{504}=\frac{10}{21}$$

ب. تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ استنتاج أمله الرياضياتي $E(X)$

مجموعة قيم المتغيّر العشوائي هي $\{0;1;2;3\}$ ، ولدينا

$$P(X=0)=\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{24}{504}=\frac{1}{21}$$

$$P(X=3)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{60}{504}=\frac{5}{42}$$

وبالتالي

x_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	1

وعندئذ نستنتج أنّ

$$E(X)=0\times\frac{1}{21}+1\times\frac{5}{14}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{42}=\frac{5}{3}$$

ج. حساب احتمال الحدث $(\log X>0)$

$$\begin{aligned}P(\log X>0)&=P(X>10^0)\\&=P(X>1)\\&=P(X=2)+P(X=3)\\&=\frac{10}{21}+\frac{5}{42}\\&=\frac{25}{42}\end{aligned}$$

■

التمرين الثاني (4 ن)

1. أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 تبعا لقيم العدد الطبيعي n

لدينا

$$\begin{cases} 3^0 \equiv 1\,[13] \\ 3^1 \equiv 3\,[13] \\ 3^2 \equiv 9\,[13] \\ 3^3 \equiv 1\,[13] \end{cases}$$

وعليه من أجل كلّ عدد طبيعي k لدينا

$$\begin{cases} 3^{3k} \equiv 1\,[13] \\ 3^{3k+1} \equiv 3\,[13] \\ 3^{3k+2} \equiv 9\,[13] \end{cases}$$

ب. استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left(3^{1962}\right)^{2025}$ على 13

لدينا

$$1962 = 3 \times 654$$

ومنه

$$3^{1962} \equiv 1\,[13]$$

وعليه

$$\begin{aligned} \left(3^{1962}\right)^{2025} &\equiv 1^{2025}\,[13] \\ &\equiv 1\,[13] \end{aligned}$$

2. تبيين أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، العدد $7 \times 42^{3n} - 2 \times 55^{3n+1} + 1962$ مضاعف لـ 13

لدينا

$$55 \equiv 3\,[13]$$

وعليه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} 55^{3n+1} &\equiv 3^{3n+1}\,[13] \\ &\equiv 3\,[13] \end{aligned}$$

لدينا

$$42 \equiv 3\,[13]$$

وعليه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} 42^{3n} &\equiv 3^{3n}\,[13] \\ &\equiv 1\,[13] \end{aligned}$$

ولدينا

$$1962 \equiv 12\,[13]$$

وعليه

$$\begin{aligned} 7 \times 42^{3n} - 2 \times 55^{3n+1} + 1962 &\equiv 7 \times 1 - 2 \times 3 + 12\,[13] \\ &\equiv 0\,[13] \end{aligned}$$

وبالتالي من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، العدد $7 \times 42^{3n} - 2 \times 55^{3n+1} + 1962$ مضاعف لـ 13

3. تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقّق $n^2 + 29^{3n+1} \times 2n + 16^{3n+2} \equiv 0\,[13]$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} n^2 + 29^{3n+1} \times 2n + 16^{3n+2} &\equiv n^2 + 3^{3n+1} \times 2n + 3^{3n+2}\,[13] \\ &\equiv n^2 + 3 \times 2n + 9\,[13] \\ &\equiv (n+3)^2\,[13] \end{aligned}$$

ومنه

$$(n+3)^2 \equiv 0\,[13]$$

وبما أنّ 13 عدد أوّلي فإنّ

$$n + 3 \equiv 0\,[13]$$

وبالتالي

$$n \equiv 10\,[13]$$

ومنه $n = 13k + 10$ حيث $k \in \mathbb{N}$

4. تعيين كلّ الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقّق ما يلي

$$\begin{cases} 3^x + 3^y \equiv 5\,[13] \\ x < y < 11 \\ PGCD\,(x;y) = 1 \end{cases}$$

نعتبر k و k' عددان من $\mathbb{N}$ ، عندئذ لدينا

$$3^{3k} + 3^{3k'} \equiv 2\,[13]$$
$$3^{3k} + 3^{3k'+1} \equiv 4\,[13]$$
$$3^{3k} + 3^{3k'+2} \equiv 10\,[13]$$

$$3^{3k+1} + 3^{3k'} \equiv 4\,[13]$$
$$3^{3k+1} + 3^{3k'+1} \equiv 6\,[13]$$
$$3^{3k+1} + 3^{3k'+2} \equiv 12\,[13]$$

$$3^{3k+2} + 3^{3k'} \equiv 10\,[13]$$
$$3^{3k+2} + 3^{3k'+1} \equiv 12\,[13]$$
$$3^{3k+2} + 3^{3k'+2} \equiv 5\,[13]$$

وعليه $3^x + 3^y \equiv 5\,[13]$ تكافئ

$$\begin{cases} x = 3k + 2 \quad ; \; k \in \mathbb{N} \\ y = 3k' + 2 \quad ; \; k' \in \mathbb{N} \end{cases}$$

وبما أنّ $x < y < 11$ و $PGCD\,(x;y) = 1$ فإنّ مجموعة الثنائيات $(x;y)$ هي $\{(2;5)\,;(5;8)\}$

■

التمرين الثالث (5 ن)

I) 1. البرهان بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $U_n > 2$

- نرمز للخاصية " $U_n > 2$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$

لدينا

$$U_0 = 3$$

ومنه

$$U_0 > 2$$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$U_k > 2$$

ومنه

$$U_k + 4 > 6$$

وعليه

$$\frac{1}{U_k + 4} < \frac{1}{6}$$

وعليه

$$-\frac{18}{U_k + 4} > -3$$

وبالتالي

$$5 - \frac{18}{U_k + 4} > 5 - 3$$

أي
$$U_{k+1} > 2$$
ومنه $P(k+1)$ صحيحة.

- وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

.2 دراسة اتجاه تغيّر (U_n) ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا
$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= 5 - \frac{18}{U_n + 4} - U_n \\ &= \frac{-U^2 + U_n + 2}{U_n + 4} \\ &= \frac{(2 - U_n)(U_n + 1)}{U_n + 4} \end{aligned}$$
وبما أنّ
$$\begin{cases} 2 - U_n < 0 \\ U_n + 1 > 0 \\ U_n + 4 > 0 \end{cases}$$
فإنّ
$$U_{n+1} - U_n < 0$$
ومنه (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

استنتاج أنّ (U_n) متقاربة. لدينا

- (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$
- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا $U_n > 2$ ، وعليه (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

وبالتالي (U_n) متقاربة.

II) .1 تبيين أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثمّ كتابة عبارة V_n بدلالة n

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا
$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 1} \\ &= \frac{5 - \frac{18}{U_n + 4} - 2}{5 - \frac{18}{U_n + 4} + 1} \\ &= \frac{\frac{3U_n - 6}{U_n + 4}}{\frac{6U_n + 6}{U_n + 4}} \\ &= \frac{3(U_n - 2)}{6(U_n + 1)} \\ &= \frac{1}{2} V_n \end{aligned}$$

ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = V_0\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0}$$
$$= \frac{U_0-2}{U_0+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$= \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

2. تبيين أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n = \dfrac{2+V_n}{1-V_n}$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = \frac{U_n-2}{U_n+1}$$

ومنه

$$(U_n+1)\,V_n = U_n-2$$

وعليه

$$U_nV_n + V_n = U_n - 2$$

وبالتالي

$$U_nV_n - U_n = -V_n - 2$$

ومنه

$$U_n\,(V_n-1) = -V_n-2$$

وبما أنّ $V_n \neq 1$ فإنّ

$$U_n = \frac{-V_n-2}{V_n-1}$$

أي

$$U_n = \frac{V_n+2}{1-V_n}$$

وبالتالي

$$U_n = \frac{\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+2}{1-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

وبما أنّ $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإنّ $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$ ، وعليه $\lim U_n = 2$

3. أ. حساب بدلالة n المجموع S حيث $S = V_0+V_1+\ldots+V_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$S = V_0+V_1+\ldots+V_n$$
$$= \frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

ب. استنتاج بدلالة n عبارة المجموع T حيث $T = \frac{3U_0}{U_0+1} + \frac{3U_1}{U_1+1} + \ldots + \frac{3U_n}{U_n+1}$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{U_n - 2}{U_n + 1} \\ &= \frac{U_n + 2U_n - 2U_n - 2}{U_n + 1} \\ &= \frac{3U_n}{U_n+1} - \frac{2(U_n+1)}{U_n+1} \\ &= \frac{3U_n}{U_n+1} - 2 \end{aligned}$$

ومنه

$$\frac{3U_n}{U_n+1} = V_n + 2$$

وعليه

$$\begin{aligned} T &= V_0 + 2 + V_1 + 2 + \ldots + V_n + 2 \\ &= V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 2 + 2 + \cdots + 2 \\ &= S + 2(n+1) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + 2n + 2 \\ &= 2n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

■

التّمرين الرّابع (7 ن)

I) 1. تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$

لدينا

- $g(x) > 0$ على $[0; +\infty[$
- g مستمرّة على $]-\infty; 0]$
- g متزايدة تماما على $]-\infty; 0]$
- $g(-1,3) \times g(-1,2) < 0$ لأنّ

$g(-1,2) \approx 0,3$	$g(-1,3) \approx -0,1$

وبالتالي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$

2. تحديد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

لدينا

- $g(x) > 0$ على $[0; +\infty[$
- g متزايدة تماما على $]-\infty; 0]$
- $g(\alpha) = 0$

ومنه

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1. أ. تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ وتفسير النتيجة هندسيا، ثمّ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{1+e^{-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{3xe^{x}}{e^{x}+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

لأنّ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^{x})=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0\end{cases}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ولدينا

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} (3x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0\end{cases}$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{3\,g(x)}{(1+e^{-x})^2}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{3\left(1+e^{-x}\right)-\left(-e^{-x}\right)\times 3x}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\\ &= \frac{3+3e^{-x}+3xe^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\\ &= \frac{3\left[(x+1)\,e^{-x}+1\right]}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\\ &= \frac{3g(x)}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\end{aligned}$$

ج. استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\left(1+e^{-x}\right)^2>0$$

وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $3g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- $f'(x)<0$ على $]-\infty;\alpha[$ و $f'(\alpha)=0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$
- $f'(x)<0$ على $]\alpha;+\infty[$ و $f'(\alpha)=0$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow f(\alpha) \nearrow +\infty$

2. تبيين أنّ $f(\alpha) = -3e^{\alpha}$ ثمّ استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$

لدينا

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha}{1+e^{-\alpha}}$$

ولدينا

$$g(\alpha) = 0$$

أي

$$(1+\alpha)e^{-\alpha} + 1 = 0$$

ومنه

$$(1+\alpha)e^{-\alpha} = -1$$

وعليه

$$1+\alpha = -e^{\alpha}$$

وبالتالي

$$\alpha = -e^{\alpha} - 1$$

وبالتعويض نجد

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{3(-e^{\alpha}-1)}{1+e^{-\alpha}} \\ &= -\frac{3(e^{\alpha}+1)}{1+e^{-\alpha}} \\ &= -\frac{3e^{\alpha}(e^{\alpha}+1)}{e^{\alpha}+1} \\ &= -3e^{\alpha} \end{aligned}$$

ولدينا

$$-1,3 < \alpha < -1,2$$

ومنه

$$-3e^{-1,2} < -3e^{\alpha} < -3e^{-1,3}$$

أي

$$-3e^{-1,2} < f(\alpha) < -3e^{-1,3}$$

3. أ. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) - 3x &= \frac{3x}{1+e^{-x}} - 3x \\ &= \frac{3x - 3x - 3xe^{-x}}{1+e^{-x}} \\ f(x) - 3x &= \frac{-3xe^{-x}}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty}(-3xe^{-x}) = \lim\limits_{t\to-\infty}(3te^{t}) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{t} = 0 \end{cases}$$

فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=0$ ، وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $y=3x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x)-3x = \frac{-3xe^{-x}}{1+e^{-x}}$$

وبما أنّ

$$\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} > 0$$

فإنّ إشارة الفرق من $-3x$ ، وعندئذ لدينا

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-3x$		$+$	0	$-$	

وبالتالي

- (C_f) يقع فوق (Δ) على $]-\infty;0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;0)$
- (C_f) يقع تحت (Δ) على $]0;+\infty[$

4. أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة O

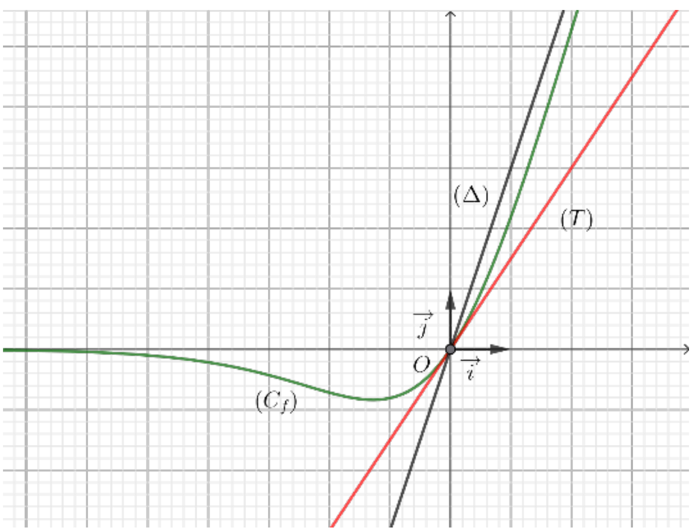
f قابلة للاشتقاق عند 0 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(0)$ حيث

$$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

وبما أنّ $f(0)=0$ و $f'(0)=\frac{3}{2}$ فإنّ

$$(T): y = \frac{3}{2}x$$

ب. إنشاء كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f)



ج. مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m) : y = mx$$

من أجل كلّ m من $\mathbb{R}$ لدينا $O\,(0;0) \in (\Delta_m)$ وعندئذ لدينا

عدد حلول المعادلة	قيم m
حلّ واحد	$m \in \left]-\infty; 0\right]$
حلّان	$m \in \left]0; \frac{3}{2}\right[$
حلّ واحد	$m = \frac{3}{2}$
حلّان	$m \in \left]\frac{3}{2}; 3\right[$
حلّ واحد	$m \in \left[3; +\infty\right[$

5. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $h(x) = f\,(2-x)$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$، $(2-x) \in D_f$ ولدينا

$$\begin{aligned} f\,(2-x) &= \frac{3\,(2-x)}{1+e^{x-2}} \\ &= \frac{3\,(2-x)\,e^2}{e^x+e^2} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ب. شرح كيفية إنشاء المنحنى الممثّل للدّالة h انطلاقا من (C_f).

- من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $(2-x) \in \mathbb{R}$
- من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $h(x) = f(2 \times 1 - x)$

وبالتالي المنحنى الممثّل للدّالة h هو نظير (C_f) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

■

سلّم تنقيط الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,5
1.ب	0,5
1.ج	0,5
2	0,25 + 0,25
3.أ	0,5 + 0,5
3.ب	0,75
3.ج	0,25

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	1
1.ب	1
2	0,75
3	0,5
4	0,75

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	1
I) 2	0,25 + 0,75
II) 1	0,25 + 0,5
II) 2	0,25 + 0,5
II) 3.أ	1
II) 3.ب	0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,5
I) 2	0,5
II) 1.أ	0,75
II) 1.ب	0,5
II) 1.ج	0,25 + 0,5
II) 2	0,5
II) 3.أ	0,5
II) 3.ب	0,5
II) 4.أ	0,5
II) 4.ب	0,5 + 0,25 + 0,25
II) 4.ج	0,25
II) 5.أ	0,25
II) 5.ب	0,5

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

I) 1. تبيين أنّ $P(A)=\frac{6}{35}$ و $P(B)=\frac{24}{35}$

$$P(A)=\frac{C_2^2\times C_3^1\times C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$$

$$P(B)=\frac{C_3^2\times C_2^1\times C_2^1+2C_2^2\times C_3^1\times C_2^1}{C_7^4}=\frac{24}{35}$$

2. حساب $P(A\cap B)$

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1+C_2^2\times C_1^1\times C_1^1+C_2^2\times C_1^1\times C_1^1}{C_7^4}=\frac{4}{35}$$

II) 1. أ. تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{0;1;2\}$ وعندئذ لدينا

- في حالة $X=0$

$$P(X=0)=\frac{A_5^2}{A_{k+7}^2}=\frac{20}{(k+7)(k+6)}=\frac{20}{k^2+13k+42}$$

- في حالة $X=1$

$$P(X=1)=\frac{2A_5^1\times A_{k+2}^1}{A_{k+7}^2}=\frac{2\times5(k+2)}{(k+7)(k+6)}=\frac{10k+20}{k^2+13k+42}$$

- في حالة $X=2$

$$P(X=2)=\frac{A_{k+2}^2}{A_{k+7}^2}=\frac{(k+2)(k+1)}{(k+7)(k+6)}=\frac{k^2+3k+2}{k^2+13k+42}$$

ب. استنتاج أنّ $E(X)=\dfrac{2k+4}{k+7}$

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times\frac{20}{(k+7)(k+6)}+1\times\frac{10k+20}{(k+7)(k+6)}+2\times\frac{k^2+3k+2}{(k+7)(k+6)}\\&=\frac{10k+20+2k^2+6k+4}{k^2+13k+42}\\&=\frac{2k^2+16k+24}{k+7}\\&=\frac{2(k+2)(k+6)}{(k+7)(k+6)}\\&=\frac{2k+4}{k+7}\end{aligned}$$

2. تعيين أصغر قيمة ممكنة للعدد k حتّى يكون $E(X)>1$

المتراجحة $E(X)>1$ تكافئ

$$\frac{2k+4}{k+7}>1$$

وتكافئ

$$2k+4>k+7$$

وتكافئ

$$k>3$$

وبالتالي أصغر قيمة ممكنة للعدد k هي 4. ■

التمرين الثاني (4 ن)

I) 1. تبيين أنّه من أجل كلّ z من $\mathbb{C}$ ، $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$

$$\begin{aligned}\overline{P(z)}&=\overline{z^4+z^3-z^2+z-2}\\&=\overline{z^4}+\overline{z^3}-\overline{z^2}+\overline{z}-\overline{2}\\&=\overline{z}^4+\overline{z}^3-\overline{z}^2+\overline{z}-2\\&=P(\overline{z})\end{aligned}$$

2. حلّ المعادلة $P(z)=0$ في $\mathbb{C}$ علما أنّها تقبل حلّا تخيّليا صرفا.

من السؤال السابق، نستنتج أنّه إذا كان z حلّا للمعادلة $P(z)=0$ فإنّ $\overline{z}$ حلّ لها أيضاً، ولمّا كانت $P(z)=0$ تقبل حلّا تخيّليا صرفا $i\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ فإنّ $-i\alpha$ حلّ لها أيضاً، وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned}P(z)&=(z-i\alpha)(z+i\alpha)(az^2+bz+c)\\&=(z^2+\alpha^2)(az^2+bz+c)\\&=az^4+bz^3+cz^2+a\alpha^2z^2+b\alpha^2z+c\alpha^2\\&=az^3+bz^3+(c+a\alpha^2)z^2+b\alpha^2z+c\alpha^2\end{aligned}$$

وذلك يكافئ

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c + \alpha^2 = -1 \\ \alpha^2 = 1 \\ c\alpha^2 = -2 \end{cases}$$

ويكافئ

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

أي

$$P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + z - 2)$$

عندئذ المعادلة تكافئ

$$z^2 + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad z^2 + z - 2 = 0$$

حل المعادلة $z^2 + 1 = 0$
المعادلة تكافئ

$$z^2 = -1$$

وتكافئ

$$z^2 = i^2$$

وتكافئ

$$z = -i \quad \text{أو} \quad z = i$$

حل المعادلة $z^2 + z - 2 = 0$
لدينا

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) \\ &= 9 \end{aligned}$$

z_1 و z_2 حيث

$$z_1 = \frac{-1-3}{2 \times 1} = -2 \qquad z_2 = \frac{-1+3}{2 \times 1} = 1$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $\{-i; i; -2; 1\}$

II) 1. تبيين أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$$

ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

2. **أ.** كتابة العدد المركّب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشّكل الجبري.

$$\begin{aligned} \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= \frac{-i-1}{i-1} \\ &= \frac{(-i-1)(i+1)}{(i-1)(i+1)} \\ &= \frac{-i^2 - i - i - 1}{i^2 - 1^2} \\ &= \frac{-2i}{-2} \\ &= i \end{aligned}$$

ومنه

$CA = CB$	$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

وبالتالي المثلّث ABC متساوي الساقين وقائم في C ■

التمرين الثالث (5 ن)

1. **أ.** تبيين أنّ العدد 977 أوّلي ثمّ استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

لدينا $\sqrt{977} \approx 31,25$ ، وبما أنّ

$2 \nmid 31$	$13 \nmid 31$
$3 \nmid 31$	$17 \nmid 31$
$5 \nmid 31$	$19 \nmid 31$
$7 \nmid 31$	$23 \nmid 31$
$11 \nmid 31$	$29 \nmid 31$

فإنّ 977 عدد أوّلي.

الاستنتاج. بما أنّ 977 عدد أوّلي و 1962 لا يقبل القسمة على 977 فإنّ $PGCD\,(1962;977) = 1$ ومنه المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب. تعيين الحلّ الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقّق $x_0+5y_0=11$

لدينا

$$x_0+5y_0=11$$

ومنه

$$x_0=11-5y_0$$

وبما أنّ $(x_0;y_0)$ حلّ للمعادلة (E) فإنّ

$$1962x_0-977y_0=8$$

أي

$$1962\,(11-5y_0)-977y_0=8$$

ومنه

$$y_0=2$$

وعليه

$$\begin{aligned}x_0&=11-5\times 2\\&=1\end{aligned}$$

ج. استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E)

لدينا

$$\begin{cases}1962x-977y=8\\1962x_0-977y_0=8\end{cases}$$

ومنه

$$1962\,(x-x_0)-977\,(y-y_0)=0$$

وعليه

$$1962\,(x-1)=977\,(y-2)$$

وبما أنّ $PGCD\,(1962; 977) = 1$ فإنّ $1962 \mid y-2$ وينتج عن ذلك أنّ

$$\begin{cases} y = 1962k + 2 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} x = 977k + 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$S = \{(977k+1\ ;\ 1962k+2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2. تعيين كُلّا من α ، β و γ ثمّ كتابة L في النظام العشري.

الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلّ للمعادلة (E) معناه

$$\begin{cases} \alpha = 977k + 1 \\ \beta = 1962k + 2 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 4 \\ 0 \leqslant \beta < 4 \end{cases}$$

فإنّ $k = 0$ ، وبالتالي $\alpha = 1$ و $\beta = 2$، وبما أنّ $\alpha + \gamma = 2\beta$ فإنّ

$$\begin{aligned} \gamma &= 2\beta - \alpha \\ &= 2 \times 2 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

كتابة L على الشكل العشري

$$\begin{aligned} L &= \alpha \times 4^0 + \beta \times 4^1 + \beta \times 4^2 + \gamma \times 4^3 + \gamma \times 4^4 + \alpha \times 4^5 \\ &= 1 \times 4^0 + 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^4 + 1 \times 4^5 \\ &= 2025 \end{aligned}$$

3. تحليل العدد 2025 إلى جداء عوامل أوليّة ثمّ استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $1962 \equiv 0\,[n^3]$

لدينا

$$\begin{array}{r|l} 2025 & 3 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

ومنه $2025 = 3^4 \times 5^2$ ونستنتج أنّ قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق $2025 \equiv 0\,[n^3]$ هي : 1 و 3

4. تعيين كلّ الثنائيات $(a;b)$ حيث $a > b$ و التي تحقّق $m = 6d$ و $a^3 + b^4 = 2025$

لدينا

$$\begin{cases} m \times d = a \times b \\ a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD\,(a'\ ; b') = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} m = d \times a' \times b' \\ a = d \times a' \\ b = d \times b' \\ PGCD\,(a'\,;b') = 1 \end{cases}$$

وعليه

$$\begin{cases} d \times a' \times b' = 6d \\ (d \times a')^3 + (d \times b')^4 = 2025 \\ PGCD\,(a'\,;b') = 1 \end{cases}$$

وبالتالي

$$\begin{cases} a' \times b' = 6 \\ d^3\left[(a')^3 + d(b')^4\right] = 2025 \\ d \in \{1;3\} \\ PGCD\,(a'\,;b') = 1 \end{cases}$$

وينتج

$$\begin{cases} (a';b') \in \{(6;1)\,;(3;2)\} \\ d^3\left[(a')^4 + d(b')^3\right] = 2025 \\ d \in \{1;3\} \end{cases}$$

- في حالة $d = 1$ الجملة غير محقّقة لأنّ

$$\begin{cases} 6^4 + 1^3 < 2025 \\ 3^4 + 2^3 < 2025 \end{cases}$$

- في حالة $d = 3$، لدينا

$$\begin{cases} (a';b') \in \{(6;1)\,;(3;2)\} \\ (a')^4 + 3(b')^4 = 75 \end{cases}$$

ومنه $a' = 3$ و $b' = 2$ ، وعليه $a = 9$ و $b = 6$

■

التمرين الرابع (٧ ن)

I) 1. تشكيل جدول تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x\ln x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (x\ln x - 1) = -1$$

g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

المعادلة

$$g'(x)=0$$

تكافئ

$$\ln x+1=0$$

وتكافئ

$$x=e^{-1}$$

وعندئذ لدينا

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| -1	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

2. أ. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7<\alpha<1,8$

- $g(x)<0$ على $]0;e^{-1}]$
- g مستمرة على $[e^{-1};+\infty[$
- g متزايدة تماما على $[e^{-1};+\infty[$
- لدينا

$$g(1,8)\approx 0,06 \qquad\qquad g(1,7)\approx -0,1$$

ومنه $g(1,7)\times g(1,8)<0$

عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,7<\alpha<1,8$.

ب. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$

لدينا

- $g(x)<0$ على $]0;e^{-1}]$
- g متزايدة تماما على $[e^{-1};+\infty[$
- $g\left(\alpha\right)=0$

وعليه

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

II) 1. أ. حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثمّ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[(x-1)(\ln x-1)\right]=+\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب)
مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)(\ln x-1)\right]=+\infty$$

لأنّ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-1)=+\infty\end{cases}$$

ب. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times(\ln x-1)+\frac{1}{x}\times(x-1)\\ &= \frac{x(\ln x-1)}{x}+\frac{x-1}{x}\\ &= \frac{x\ln x-1}{x}\\ &= \frac{g(x)}{x}\end{aligned}$$

ج. تبيين أنّ f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$x>0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$ وعندئذ لدينا

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

- $f'(x)<0$ على $]0;\alpha[$ و $f'(\alpha)=0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$
- $f'(x)<0$ على $]\alpha;+\infty[$ و $f'(\alpha)=0$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty]$

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 1

f قابلة للاشتقاق عند 1 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ حيث

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

ولدينا

$$\begin{aligned} f(1) &= (1-1)(\ln 1-1)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times\ln 1-1}{1}\\ &= -1\end{aligned}$$

وبالتالي

$$(T): y=-x+1$$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x)-(-x+1) &= (x-1)(\ln x-1)-(-x+1)\\ &= (x-1)(\ln x-1)+(x-1)\\ &= (x-1)(\ln x-1+1)\\ &= (x-1)\ln x\end{aligned}$$

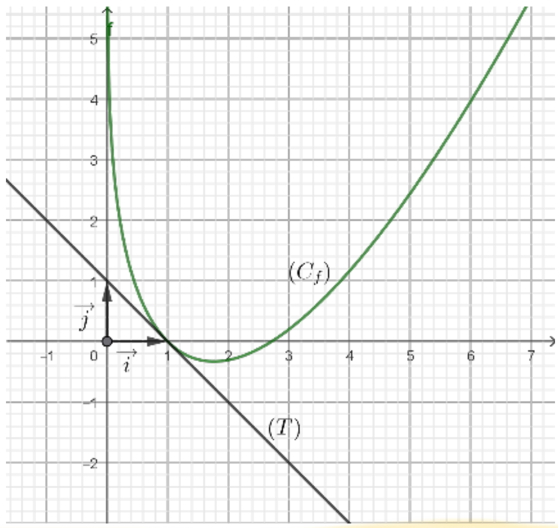
ومنه

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)-(-x+1)$	||	$+$	0	$+$	

وبالتالي

- (C_f) يقع فوق (T) على $]0;1[\cup]1;+\infty[$
- (C_f) يقطع (T) في النقطة $A\,(1;0)$

3. أ. إنشاء كُلّاً من (T) و (C_f).



ب. مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=-x+m$ حسب قيم الوسيط الحقيقي m

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m): y=-x+m$$

وعندئذ لدينا

قيم m	عدد حلول المعادلة
$m\in\,]-\infty;1[$	لا توجد حلول
$m=1$	حلّ واحد
$m\in\,]1;+\infty[$	حلّان

4. أ. كتابة بدلالة λ العدد $\mathcal{A}\,(\lambda)$ المعرّف بـ : $\mathcal{A}\,(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}[f(x)+x-1]\,dx$ ، ثمّ تفسير النتيجة هندسيا.

$$\mathcal{A}\,(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}[f(x)+x-1]dx$$

$$=\int_{\lambda}^{1}[(x-1)\ln x]dx$$

$$\mathcal{A}(\lambda)=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_{\lambda}^{1}-\int_{\lambda}^{1}\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$
$$=\left(\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda-\left[\left(\frac{x^2}{4}-x\right)\right]_{\lambda}^{1}$$
$$=\left(\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda+\frac{\lambda^2}{4}-\lambda+\frac{3}{4}$$

التفسير. من أجلّ كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا $f(x)-(-x+1)\geq 0$ ، ومنه $\mathcal{A}(\lambda)$ هي مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x=\lambda$ و $x=1$

ب. حساب $\lim\limits_{\lambda\overset{>}{\to}0}\mathcal{A}(\lambda)$

لدينا

$$\left(\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\right)\ln\lambda+\frac{\lambda^2}{4}-\lambda+\frac{3}{4}=\lambda\ln\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda+\frac{\lambda^2}{4}-\lambda+\frac{3}{4}$$

وبما أنّ

$$\begin{cases}\lim\limits_{\lambda\overset{>}{\to}0}(\lambda\ln\lambda)=0\\ \lim\limits_{\lambda\overset{>}{\to}0}(\lambda^2\ln\lambda)=0\end{cases}$$

فإنّ

$$\lim_{\lambda\overset{>}{\to}0}\mathcal{A}(\lambda)=\frac{3}{4}$$

5. **حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$**

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\omega_n=1-\frac{f(e^{-n})}{n+1}$$
$$=1-\frac{(e^{-n}-1)(\ln e^{-n}-1)}{n+1}$$
$$=1-\frac{(e^{-n}-1)(-n-1)}{n+1}$$
$$=1+\frac{(e^{-n}-1)(n+1)}{n+1}$$
$$=e^{-n}$$

وعليه

$$S_n=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n$$
$$=1+e^{-1}+\cdots+e^{-n}$$
$$=1\times\frac{1-(e^{-1})^{n-0+1}}{1-e^{-1}}$$
$$=\frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}$$
$$=\frac{e-e^{-n}}{e-1}$$

وبما أنّ

$$\begin{aligned}\lim e^{-n} &= \lim \frac{1}{e^n} \\ &= 0\end{aligned}$$

فإنّ

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,75+ 0,75
I) 2	0,75
II) 1.أ	1
II) 1.ب	0,5
II) 2	0,25

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,25 + 0,25
2	0,5
3.أ	0,5 + 0,75
3.ب	0,25 + 0,25
4.أ	0,75
4.ب	0,5

التمرين الثالث (5 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,5 + 0,5
1.ب	0,5
1.ج	1
2	1
3	0,5 + 0,5
4	0,5

التمرين الرابع (7 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,5
I) 2.أ	0,5
I) 2.ب	0,5
II) 1.أ	0,75
II) 1.ب	0,5
II) 1.ج	0,25 + 0,5
II) 2.أ	0,5
II) 2.ب	0,5
II) 3.أ	0,5 + 0,25
II) 3.ب	0,25
II) 4.أ	0,25 + 0,5
II) 4.ب	0,25
II) 5	0,25 + 0,25

انتهى