المستوى:الثالثة علوم تجريبية	ماي 2025
امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات /	المدة : 3 سا و نصف.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين 1 (5 ن) لعبة تقتضي سحب 4 كرات في آن واحد من كيس غير شفاف يحتوي على كرة سوداء و تسع كرات بيضاء ثم يتم رمي زهرة نرد متزنة و مرقمة من 1 الى 6.

- إذا كانت الكرة السوداء موجودة في السحب فينبغي الحصول على عدد زوجي لكي نربح.
- إذا لم تكن الكرة السوداء في السحب فينبغي الحصول على الرقم 6 لكي نربح

نعتبر الحادثتين: N " الكرة السوداء موجودة في السحب " R " اللاعب يربح "

1) أ) احسب احتمال الحادثة N .

ب) شكل شجرة الاحتمالات ثم بين أن $P(R) = \frac{3}{10}$

2) لكي نلعب هذه اللعبة ندفع في البداية المبلغ m دينار (m عدد طبيعي)

- إذا ربح اللاعب يتحصل على $4\ DA$ و إذا لم يربح لكن سحب الكرة السوداء يرد إليه المبلغ m و إذا لم يربح و لم يسحب الكرة السوداء فإنه يخسر المبلغ m.

نسمي X المتغير العشوائي الذي يعبر عن الربح الجبري للاعب.

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) عبر بدلالة m الأمل الرياضياتي $E(X)$.

جـ) عين قيمة m التي تكون من اجلها اللعبة عادلة.

التمرين 2 (4 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{2u_n-1}$

f دالة معرفة على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

1) ادرس إتجاه تغير الدالة f.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n). ماذا تستنتج ؟

3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = ln(\frac{u_n-1}{u_n})$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

$T_n = ln(e\,u_0-e)+ ln(e\,u_1-e) \cdots + ln(e\,u_n-e) -ln(u_0)-ln(2\,u_1) - \cdots -ln((n+1)\,u_n)$

التمرين 3 (4 ن) عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات التالية مع التعليل :

1) Z عدد مركب حيث $Z=sin(\frac{\pi}{8})+i\cos(\frac{\pi}{8})$ ، الشكل المثلثي للعدد المركب Z هو :

أ) $-cos(\frac{\pi}{8})+i\,sin(\frac{\pi}{8})$ ب) $cos(\frac{\pi}{8})+i\,sin(\frac{\pi}{8})$ جـ) $cos(\frac{3\pi}{8})+i\,sin(\frac{3\pi}{8})$

2) الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ هو : أ) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-7\pi}{12}i}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$ جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

3) الجذرين التربيعين للعدد المركب $3+4i$ هما : أ) $3+i$ و $-3-i$ ب) $2+i$ و $-2-i$ جـ) $1+i$ و $-1-i$

4) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو : أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}-i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$ جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i(\frac{-2+\sqrt{3}}{2})$

التمرين 4 (7 ن)

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+ln(x)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) تسمى (Γ) المنحنى البياني للدالة " ln " في المعلم السابق .

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ln(x))$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المنحنى (Γ).

4) أرسم (Γ) ثم (C_f) .

5) H دالة معرفة على $[3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x ln\,t\,dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما.

أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

ب) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلاتهما: $x=3$, $x=4$

6) g الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$

ادرس تغيرات الدالة g

انتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين 1 (4 ن)

يحتوي كيس على 8 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي : أربع كريات حمراء مرقمة بـ : 0، 1 ، 1 و 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بــ: 0، 1، 1 و كرية واحدة زرقاء تحمل الرقم 2 .

1) نسحب عشوائيا كريتان و في آن واحد . احسب احتمال الحوادث التالية:

A " الكريتان المسحوبتان من لونين مختلفين ". B " الكرتان المسحوبتان تحمل رقمين فرديين " C " سحب كرة حمراء على الأكثر".

2) بين أن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتين تحمل رقمين زوجيين علما أنها من نفس اللون هو $\frac{1}{9}$

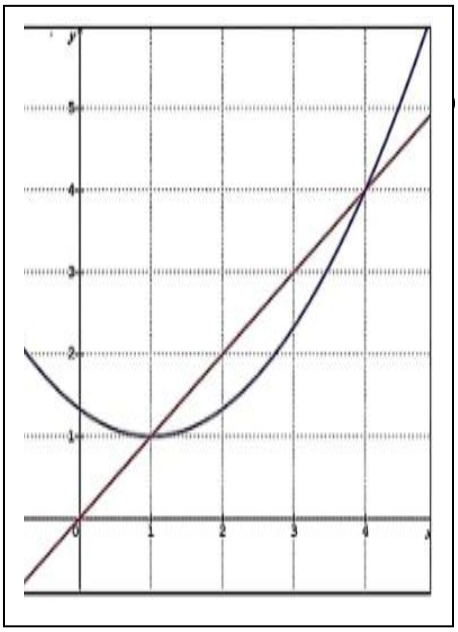
3) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب القيمة المطلقة للفرق بين الرقمين المحصل عليها.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله .

ب) احسب احتمال الحادثة $e^X-1 > 0$

ج) أحسب$E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X. ثم عين قيمة α حتى يكون $E(2025X+\alpha) = 1446$

التمرين 2 (4 ن)



I) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1+\frac{1}{3}(x-1)^2$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بــ $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

1) أ)انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0،u_1،u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le 4$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، استنتج انها متقاربة ثم احسب نهايتها.

4) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = ln(\frac{u_n-1}{3})$

أ) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول .

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3e^{2^n ln(\frac{2}{3})}+1$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n $T_n=\frac{(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)}{3^n}$ بين أن: $T_n= 3e^{(2^{n+1}-1)ln(\frac{2}{3})}$

التمرين 3 (5 ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $(\overline{Z}-2+2i)(Z^2-4Z+16) = 0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب :

$Z_C = \overline{Z_B}$ ، $Z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ ، $Z_A = 2 + 2i$

1) اكتب الأعداد Z_A ،Z_B و Z_C على الشكل الأسي .

2) أ) اكتب العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3) اكتب العدد المركب $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$ على الشكل الأسي .ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

4) أ) اوجد قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

ب) تحقق أن: $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{2024} + \left(\frac{Z_C}{4}\right)^{2006} = 0$

5) عين Z_G لاحقة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

6) أ) عين (E_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$

ب) عين (E_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|\overline{Z} - 2\sqrt{3} + 2i| = |iz + 2 - 2i|$

التمرين 4 (7 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ب) أحسب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2) أ) احسب $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ و $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - 2x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيمين $(\Delta_1): y = 2x$ و $(\Delta_2): y = 2x - 1$

3) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ احسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

5) أرسم (Δ_1) (Δ_2) و (C_f).(يعطى $f(-ln2) = -ln4 - 2$ و $f(\ln 2) = ln4 + 1$)

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و اشارة حلول المعادلة : $\frac{1}{e^x - 1} - m = 0$

7) أ) بين ان الدالة $x \mapsto -x + ln(e^x\text{-}1)$ هي دالة اصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0\,; +\infty[$

ب) أحسب $\int_{ln2}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}$ و فسر النتيجة بيانيا

8) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x) = |f(x)|$

اشرح كيفية رسم منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم

انتهى الموضوع الثاني

☺ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ☺

التصحيح النموذجي

الموضوع الاول

تمرين 1

1) أ) $P(N) = \frac{2}{5}$.

ب) شجرة الاحتمالات

$P(\ R\ ) = (\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{10}$

أ) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

$X = \{\ 4\text{-}m\ ;\ \text{-}m\ ;\ 0\ \}$

$X=x_i$	$4-m$	$-m$	0
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

ب) $E(X) = \frac{12-8m}{10}$.

جـ) قيمة m التي تكون من اجلها اللعبة عادلة. $m=\frac{3}{2}$

تمرين 2

1) f دالة متزايدة تماما على $]1\ ;\ +\infty[$ و متناقصة تماما عل المجال $]\frac{1}{2}\ ;1]$

2) أ) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n).

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

3)أ) (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول $v_0 = ln\,\frac{1}{2}$.

إذن $v_n = ln\,\frac{1}{2} \times 2^n$ و منه $v_n = ln\,(\frac{1}{2})^{2^n}$

ب) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$

لدينا $u_n = \frac{1}{1-e^{v_n}}$ إذن $u_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$

ثم استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

4) حساب بدلالة n المجموعين S_n و T_n :

$S_n\ = ln\,2\,(1-(2)^{n+1})$

$T_n = (n+1) - ln\,(n+1)! + ln\,2\,(1-(2)^{n+1})$

التمرين 3 (4 ن):

1) Z عدد مركب حيث $Z = sin(\frac{\pi}{8}) + i\cos(\frac{\pi}{8})$ ، الشكل المثلثي للعدد المركب Z هو : **جـ)** $cos(\frac{3\pi}{8}) + i\,sin(\frac{3\pi}{8})$

2) الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ هو : أ) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-7\pi}{12}i}$

3) الجذرين التربيعين للعدد المركب $3+4i$ هما : ب) $2+i$ و $-2-i$

4) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو : أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i(\frac{2+\sqrt{3}}{2})$

<u>التمرين 4 (7 ن)</u>:

1) أ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$

تفسير النتائج بيانيا.

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتهما $x=0$ و $x=2$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) إتجاه تغير الدالة f. حساب $f'(x) = \frac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$

إشارة $f'(x)$:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	‖	-	0	+	

و منه f دالة متزايدة تماما على المجالين $]0 ; 1]$ و $[4 ;+\infty[$

و متناقصة تماما على المجالين $[1 ;2[$ و $]2 ; 4]$

جدول التغيرات

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$

أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln(x)) = \mathbf{0}$

تفسير النتيجة بيانيا.

المنحنيين (C_f) و (Γ) متقاربان عند $+\infty$

ب) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المنحنى (Γ).

(C_f) يقع تحت (Γ) على المجال $]0 ; 2[$

(C_f) يقع فوق (Γ) على المجال $]2 ; +\infty[$

4) رسم (Γ) ثم (C_f) .

5) أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

$H(x)=x\ln x - x - 3\ln 3 + 3$

ب) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلاتهما:

$x = 4$, $x=3$

$$\boldsymbol{A} = \int_3^4 f(x)d\,x = (9\ln 2 - 3\ln 3 - 1)\,u\,a$$

6) تغيرات الدالة g

النهايات $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

، $\lim_{x \underset{>}{\to} -1} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \underset{<}{\to} -1} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} g(x) = -\infty$

اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها .

حساب $g'(x) = -2f'(-2\,x)$

إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{-1}{2}$		0
$g'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	||

و منه g دالة متناقصة تماما على المجالين $]-\infty ; -2]$ و $[\frac{-1}{2} ;0[$

و متزايدة تماما على المجالين $]-1 ; \frac{-1}{2}]$ و $[-2 ; -1[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{-1}{2}$		0
$g'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	||
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+2\ln 2$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ||

الموضوع الثاني

تمرين1

(1

$$p(A)=\frac{C_4^1C_1^1+C_3^1C_1^1+C_3^1C_4^1}{C_8^2}=\boxed{\frac{19}{28}}$$

$$p(B)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\boxed{\frac{6}{28}}$$

$$p(C)=\frac{C_4^2+C_4^1C_4^1}{C_8^2}=\boxed{\frac{22}{28}}$$

2) نبين أن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتين تحمل رقمين زوجيين علما أنها من نفس اللون هو $\frac{1}{9}$

$$p_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{p(\overline{A}\cap\overline{B})}{p(\overline{A})}=\frac{\frac{C_2^2}{C_8^2}}{1-p(A)}=\frac{\frac{1}{28}}{1-\frac{19}{28}}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

3) أ) قيم المتغير العشوائي X ثم قانون احتماله .

$X=\{0\ ;\ 1;\ 2\}$

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{28}$	$\frac{16}{28}$	$\frac{4}{28}$

ب) $P(e^X-1\ >0\ )=\frac{20}{28}$

ج) الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

$E(X)=\frac{6}{7}$

قيمة α حتى يكون $E(2025X+\alpha)=1446$

$\alpha=-\frac{2028}{7}$

التمرين 2

1) أ)التمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0،u_1،u_2 و u_3

ب) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

المتتالية (u_n) متناقصة تماما و متقاربة.

2) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 4$

3) اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{3}(U_n-1)^2+1-U_n=\frac{U_n^2-5U_n+4}{3}=\frac{1}{3}(U_n-1)(U_n-4)$$

لدينا $1 \le U_n \le 4$ ومنه $0 \le (U_n-1)(U_n-4)$ أي $U_{n+1}-U_n \le 0$ ومنه المتتالية (U_n) متناقصة.

المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 وبالتالي فهي متقاربة ،

وبالتالي يوجد عدد حقيقي L بحيث $\lim_{n\to+\infty} U_n = L$ و هو حل للمعادلة $f(x)=x$ أي $\frac{1}{3}(L-1)^2+1=L$

ومنه $\frac{1}{3}(L-1)(L-4)=0$ ومنه إما $L=1$ او $L=4$ ومنه $L=1$ لأن المتتالية متناقصة و$U_0=3$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.

4) أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها الأول .

أ- لدينا $V_{n+1} = \ln\left(\frac{U_{n+1}-1}{3}\right) = \ln\left[\left(\frac{U_n-1}{3}\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{U_n-1}{3}\right) = 2V_n$

ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 و حدها الأول V_0 حيث $V_0 = \ln\left(\frac{u_0-1}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

ب) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3e^{2^n \ln(\frac{2}{3})}$ ثم حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $V_n = V_0 \times q^n = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \times 2^n$ ولدينا : $U_n = 3e^{V_n}+1$ ومنه $U_n = 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)}+1$.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 3e^{2^n \ln\left(\frac{2}{3}\right)}+1 = 1$$

5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n $T_n = \frac{(u_0-1)(u_1-1)\ldots(u_n-1)}{3}$ نبين أن: $T_n = 3e^{2^{(n+1)} \ln(\frac{2}{3})}$

$$W_n = \frac{(U_0-1)(U_1-1)(U_2-1)\times\ldots\ldots\times(U_n-1)}{3^n}$$

$$= \frac{\left(3\times e^{2^0\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\left(3\times e^{2^1\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\left(3\times e^{2^2\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\times\ldots\ldots\times\left(3\times e^{2^n\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)}{3^n}$$

$$= \frac{3^{n+1}\times e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\left(2^0+2^1+\ldots+2^n\right)}}{3^n}$$

$$= 3e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\left(2^{n+1}-1\right)}$$

ومنه : $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} 3e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\left(2^{n+1}-1\right)} = 0$

__التمرين 3__

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\overline{Z}-2+2i)(Z^2-4Z+16)=0$

$S=\{2+2i \,;\, 2+2\sqrt{3}i;\, 2-2\sqrt{3}i\}$

II)

1) كتابة العددان Z_A و Z_B على الشكل الأسي .

$Z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$; $Z_B = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$

2) أ) كتابة العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل الجبري

$$\frac{Z_A}{Z_B}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

استنتاج القيمة المضبوط لكل من $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3)كتابة العدد المركب $\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}$ على الشكل الأسي

$$\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

. طبيعة المثلث ABC قائم في C

4) أ) قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

$n=-3-6k \quad ; k\in\mathbb{Z}_-$

ب) التحقق أن: $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{2024}+\left(\frac{Z_C}{4}\right)^{2006}=0$

5) عين Z_G لاحقة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

$$Z_G=1+\sqrt{3}$$

6) أ) (E_1) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r=4$

ب) (E_2) هي محور القطعة المستقيمة $[AC]$

التمرين 4 (7 ن)

2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(3

ب) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x+1)=0$

(C_f) يقبل مستقيين مقاربين معادلتهما $y=2x$ و $y=2x-1$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب

ب) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta_1): y=2x$

- على المجال $]-\infty;0[$: (C_f) يقع تحت (Δ_1))
- على المجال $]0;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Δ_1)

الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta_2): y=2x-1$

- على المجال $]-\infty;0[$: (C_f) يقع تحت (Δ_1))
- على المجال $]0;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Δ_1)

3) أ) نبين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

- إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-ln\,2$		0		$ln\,2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

و منه f دالة متزايدة تماما على المجالين $]-\infty\,;-ln\,2]$ و $[ln\,2\,;+\infty[$

و متناقصة تماما على المجالين $[-ln\,2;0[$ و $]0\,;ln\,2[$

- جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-ln\,2$		0		$ln\,2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-2-ln4$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1+ln\,4$	↗	$+\infty$

4) من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$

حساب $f(-x)+f(x)=\ -1$

تفسير النتيجة بيانيا.

النقطة $(0\,;-\frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5) انشاء (Δ_1) (Δ_2) و (C_f).(يعطى $f(-ln2)=-ln4-2$ و$f(\ln 2)=ln4+1$)

6) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و اشارة حلول المعادلة : $\frac{1}{e^x-1}-m=0$

لدينا $\frac{1}{e^x-1}-m=0$ و منه $f(x)=2x+m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=2x+m$

- لما $m\in]-\infty;-1[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
- لما $m\in[-1;1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.
- لما $m\in]1\,;+\infty[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.

7) أ) نبين ان الدالة $x\mapsto -x+ln(e^x\text{-}1)$ هي دالة اصلية للدالة $x\mapsto \frac{1}{e^x-1}$

$[-x+ln(e^x-1)]'=\frac{1}{e^x-1}$

ب) $\int_{ln2}^{1}\frac{dx}{e^x-1}=\ -1+ln(2e-2)$

تفسير النتيجة بيانيا

تمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين $x=1$ و $x=ln2$

8) كيفية رسم منحنى الدالة h انطلاقا من $\left(C_f\right)$

لما $x\in]0\,;+\infty[$ منحنى الدالة h ينطبق على (C_f)

لما $x\in]-\infty;\ 0[$ منحنى الدالة h نظير الجزء الغير منطبق بالنسبة إلى محور الفواصل