الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الأستاذ بلجودي حمو
دورة 2025

امتحان بكـــالوريا تجريبي
شعبة : علوم تجـــريبية

اختبار في مادة الرياضيات | المدة: 3 ســـا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد المضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:
$Z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 4+i\sqrt{3}$. اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير.

1) قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(z_A)^n = (z_B)^n$:

$n = 3k$ $\quad$ $n = 3k+6$ $\quad$ $n = 6k$

2) العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}$ يساوي :

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad$ $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad$ $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3) لاحقة مركز ثقل المثلث ABC هي :

$2+i\sqrt{3}$ $\quad$ $2+\frac{\sqrt{3}}{3}i$ $\quad$ $2-\frac{\sqrt{3}}{3}i$

4) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق: $|-z| = |\overline{z}-\overline{z_B}|$:

محور القطعة $[OA]$ $\quad$ محور القطعة $[OB]$ $\quad$ محور القطعة $[AB]$

5) لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع هي :

$z_D = 4$ $\quad$ $z_D = -4$ $\quad$ $z_D = 4+3i\sqrt{3}$

التمرين الثاني : (4.5 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n-4}{u_n-1}$.

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3-\frac{1}{u_n-1}$.

1) ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 2$.

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = e^{\frac{u_n}{u_n-2}}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 يطلب تعيين حدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $s_n = \ln\left(\frac{v_1}{e}\right)^{u_1} + \ln\left(\frac{v_1}{e}\right)^{u_1} + ...+ \ln\left(\frac{v_n}{e}\right)^{u_n}$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

U_1، U_2 صندوقان متماثلان ، يحتوي $U1$ على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء ، و الصندوق U_2 يحتوي على كرة حمراء و 5 كرات سوداء . (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس).

1) نسحب عشوائيا كرة من U_1 ، إذا كانت حمراء نعيدها لنفس الصندوق و نسحب عشوائيا كرة منه ، وإذا كانت سوداء نسحب عشوائيا كرة من U_2 .

أ) احسب $p(A)$ احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من نفس اللون .

ب) احسب $p(R)$ احتمال أن تكون الكرة الثانية المسحوبة حمراء .

جـ) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية مسحوبة من الصندوق U_2 علما أنها حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

-عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$. (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

التمرين الرابع : (7.5 نقاط)

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2x^2+4x+1+\ln(x+1)$

1.ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2.بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.3\prec\alpha\prec-0.2$.

3.عين حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x$ مستقيم مقارب مائل لــ (C) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

3) .أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) الموازي لـ (Δ) .

4) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين احدهما معدوم و الأخر β حيث $-0.4\prec\beta\prec-0..3$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب) أنشئ (C) و (Δ) و (T) . (تعطى $f(\alpha)=0.2$)

5) ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=-2x+m$

6) أ) جد F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) احسب بدلالة β مساحة الحيز S من المستوي المحدد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=\beta$.

انتهــي الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

أجب بـ " صحيح " أو "خطأ " مع التبرير.

1) الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية $y'+y+1=0$ و الذي يحقق $y(\ln 2)=0$ هو $y=-1-2e^{-x}$.

2) كيس به كرتين سوداوين و $n+1$ كرة حمراء ($n\geq 2$) الكرات لا نفرق بينها باللمس .

نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس و نعتبر الحدث A :" سحب كرتين من نفس اللون " .

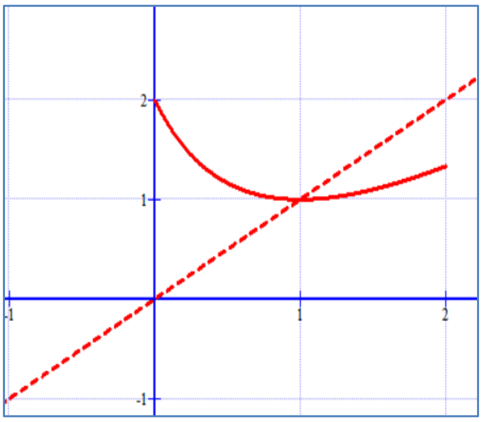
احتمال الحدث A : $P(A)=\dfrac{n^2+n+2}{n^2+5n+6}$.

3) Z عدد مركب حيث $Z=2i$ ، العدد Z^{2023} تخيلي صرف .

4) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ: $f(x)=xe^{-x}$ ، القيمة المتوسطة للدالة على المجال $[0;1]$ هي :

$m=1-\dfrac{2}{e}$

التمرين الثاني : (5 نقاط)



نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ و

ليكن (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.(انظر الشكل)

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ) انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) مبرزا خطوط الانشاء .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1\prec u_n\leq 2$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج تقاربها.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-1=\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n+1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\prec\dfrac{u_n-1}{u_n+1}\leq\dfrac{1}{3}$ ثم استنتج أن $0\prec u_{n+1}-1\leq\dfrac{1}{3}(u_n-1)$.

جـ) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي: $0\prec u_n-1\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 6 كريات تحمل كل منها الرقم 1 ، منها 2 سوداء و 4 حمراء ، و 5 كريات تحمل كل منها الرقم 2 ، منها 3 سوداء و واحدة حمراء و واحدة خضراء .

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحدث A : " الكريات الثلاثة من نفس اللون ". و الحدث B : " الكريات الثلاث لها نفس الرقم " .

و الحدث C : " جداء أرقام الكرات الثلاثة عدد زوجي " .

1) أ) احسب احتمال الأحداث A ، B و C.

ب) بين أن : $p(A\cap B)=\dfrac{1}{33}$ ثم استنتج $p_A(B)$ و $p(\overline{A\cup B})$.

2.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المتحصل عليها .

-عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي و أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$ ثم استنتج $E(X+2023)$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x-x+2$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\boldsymbol{R}$ بـ $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$. وليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ $f'(x)=e^{-x}g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لــ (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3\prec\alpha\prec0.5$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

6) أنشئ (Δ) و (C_f).

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x)-x=1+e^{-x}-f'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $x\to f(x)-x$ على $\mathbb{R}$.

2.أحسب بدلالة α ، مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\alpha$.

انتهـــي الموضوع الثاني

التصحيح المقترح للموضوع الأول

التمرين الأول :

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن C, B, A نقط لواحقها على الترتيب:

$Z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 4+i\sqrt{3}$. اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير.

1) قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(z_A)^n = (z_B)^n$:

$$Arg(z_A)^n = n\times Arg(z_A) = n\times\frac{\pi}{3} \quad ; \quad Arg(z_B)^n = n\times Arg(z_B) = n\times\frac{-\pi}{3}$$

$$n\times\frac{\pi}{3} = n\times\frac{-\pi}{3} + 2k\pi$$

$$n\times\frac{1}{3} = n\times\frac{-1}{3} + 2k$$

$$n = -n + 6k$$

$$2n = 6k$$

$$n = 3k$$

الأستاذ : بلجودي حمــو

2) العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}$ يساوي :

$$\left|\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}\right| = \left(\frac{|z_A|}{|z_B|}\right)^{2023} = \left(\frac{2}{2}\right)^{2023} = 1$$

$$Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023} = 2023\left(Arg(z_A) - Arg(z_B)\right) = 2023\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{3}\right) = 2023\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4044\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

$$= 4044\frac{\pi}{3} = 1438\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023} = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3) لاحقة مركز ثقل المثلث ABC هي :

$$\frac{Z_A + Z_A + Z_A}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}+4+i\sqrt{3}}{3} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

4) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق: $|-z| = |\overline{z} - \overline{z_B}|$:

$$|-z| = |\overline{z} - \overline{z_B}| \Rightarrow |z| = |\overline{\overline{z} - \overline{z_B}}| \Rightarrow |z| = |\overline{\overline{z}} - \overline{\overline{z_B}}| \Rightarrow |z| = |z - z_B| \Rightarrow OM = BM$$ محور القطعة $[OB]$

5) لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع هي :

$$Z_D - Z_C = Z_A - Z_B$$

$$Z_D = Z_A - Z_B + Z_C = 4 + 3i\sqrt{3}$$

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{u_n - 1}$.

الأستاذ بلجودي حمو

$$u_{n+1} = \frac{3u_n-4}{u_n-1} = \frac{3(u_n-1)-1}{u_n-1} = 3-\frac{1}{u_n-1}$$

1) ب) برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ -2$.

$n=0$: $u_0 = 3 \succ 2$.

(1 $u_n \succ 2$ و منه $u_n \succ 2$ و منه $u_n - 1 \succ 1$ و منه $\frac{1}{u_n-1} \prec 1$ و منه $\frac{-1}{u_n-1} \succ -1$ و منه $3-\frac{1}{u_n-1} \succ 2$ و منه

$u_{n+1} \succ 2$ اذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \succ 2$.

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

$$u_{n+1}-u_n = \frac{3u_n-4}{u_n-1}-u_n = \frac{-u_n{}^2+4u_n-4}{u_n-1} = \frac{-(u_n-2)^2}{u_n-1} \prec 0$$ المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N

(u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل اذن هي **متقاربة .**

2) أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 يطلب تعيين حدها الأول .

$$v_{n+1} = e^{\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2} = \frac{\frac{3u_n-4}{u_n-1}}{\frac{3u_n-4}{u_n-1}-2} = \frac{\frac{3u_n-4}{u_n-1}}{\frac{u_n-2}{u_n-1}} = 2+\left(\frac{3u_n-4}{u_n-2}-2\right) = 2+\frac{u_n}{u_n-2}$$

$$v_{n+1} = e^{\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-2}} = e^{2+\frac{u_n}{u_n-2}} = e^2 \times e^{\frac{u_n}{u_n-2}} = e^2 v_n$$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^2 و حدها الأول $v_0 = e^{\frac{u_0}{u_0-2}} = e^3$.

الأستاذ : بلجودي حمـــو

ب) أكتب v_n بدلالة n:

$$v_n = v_n \times q^n = e^3 \times \left(e^2\right)^n = e^3 \times e^{2n} = e^{2n+3}$$

ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$v_n = e^{\frac{u_n}{u_n-2}} \Rightarrow \ln v_n = \ln e^{\frac{u_n}{u_n-2}} \Rightarrow \ln v_n = \frac{u_n}{u_n-2} \Rightarrow (u_n-2)\ln v_n = u_n$$

$$\Rightarrow u_n \ln v_n - 2\ln v_n = u_n \Rightarrow u_n\left(\ln v_n - 1\right) = 2\ln v_n$$

$$u_n\left(\ln v_n - 1\right) = \frac{2\ln v_n}{\ln v_n - 1} = \frac{2\ln e^{3n+2}}{\ln e^{3n+2}-1} = \frac{2(3n+2)}{3n+2-1} = \frac{6n+4}{3n+1}$$

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $s_n = \ln\left(\frac{v_0}{e}\right)^{u_0} + \ln\left(\frac{v_1}{e}\right)^{u_1} + \ldots\ldots + \ln\left(\frac{v_n}{e}\right)^{u_n}$.

$$\ln\left(\frac{v_n}{e}\right)^{u_n} = u_n \ln\left(\frac{e^{3n+2}}{e}\right) = u_n \ln\left(e^{3n+2-1}\right) = u_n \ln\left(e^{3n+1}\right) = u_n\left(3n+1\right) = \frac{6n+4}{3n+1}\left(3n+1\right) = 6n+4$$

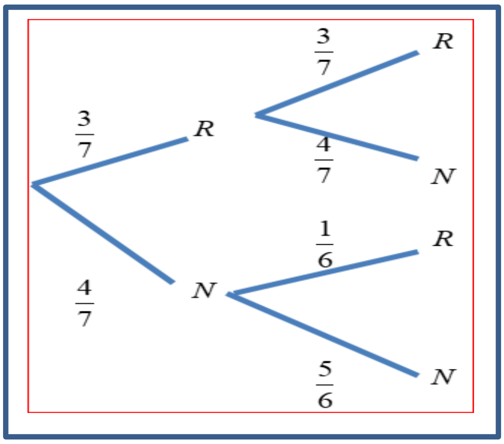
s_n هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية : $s_n = \frac{n+1}{2}(6n+4+4) = \frac{n+1}{2}(6n+10) = (n+1)(3n+5)$

الأستاذ بلجودي حمو

التمرين الثالث :

U_1 ، U_2 صندوقان متماثلان ، يحتوي $U1$ على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء ، و الصندوق U_2 يحتوي على كرة حمراء و 5 كرات سوداء . (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس).

1) نسحب عشوائيا كرة من U_1 ، إذا كانت حمراء نعيدها لنفس الصندوق و نسحب عشوائيا كرة منه ، وإذا كانت سوداء نسحب عشوائيا كرة من U_2 .



أ) احسب $p(A)$ احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من نفس اللون .

$$p(A)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{97}{147}$$

ب) احسب $p(R)$ احتمال أن تكون الكرة الثانية المسحوبة حمراء .

$$p(R)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{41}{147}$$

جـ) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية مسحوبة من الصندوق U_2 علما أنها حمراء.

الأستاذ : بلجودي حمـــو

$$p_R(U_2)=\frac{p(U_2\cap R)}{p(R)}=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}}{\frac{41}{147}}=\frac{70}{41}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

$X=\{0;1;2\}$

$$p(X=0)=\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{21}\qquad p(X=1)=\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{50}{147}\qquad p(X=2)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{49}$$

-عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$. (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

$$E(X)=0\times\frac{10}{21}+1\times\frac{50}{147}+2\times\frac{9}{49}=\frac{170}{147}$$

التمرين الرابع :

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2x^2+4x+1+\ln(x+1)$

1.ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

من اجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $g'(x)=4x+4+\frac{1}{x+1}=\frac{4(x+1)^2+1}{x+1}$

من اجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $g'(x)\succ 0$ وبالتالي فالدالة g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

جدول تغيراتها:

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الأستاذ بلجودي حمو

2.بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.3 \prec \alpha \prec -0.2$.

g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و من ثم على $[-0.3;-0.2]$ و لدينا $g(-0.3)=-0.37 \prec 0$ و $g(-0.2)=0.056 \succ 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.3 \prec \alpha \prec -0.2$

الأستاذ : بلجودي حمــــو

3.عين حسب قيم إشارة $g(x)$.

تلخص في الجدول الموالي :

x	-1		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ثم احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

$$\bullet \lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\left(-2x+\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\right)=-\infty \qquad \bullet \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x+\underbrace{\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)}_{0}\right)=-\infty$$

<u>تفسير النتيجة هندسيا :</u>المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب عمودي.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ؛

$$f'(x)=\left(-2x+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)'=-2+\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}-2$$

$$=\frac{1-\ln(x+1)-2x^2-4x-2}{(x+1)^2}=\frac{-\left(2x^2+4x+1+\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}=\frac{-g(x)}{(x+1)^2}$$

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x$ مستقيم مقارب مائل لـــ (C) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[-2x+\frac{\ln(x+1)}{x+1}+2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x$ مستقيم مقارب مائل لــ (C) بجوار $+\infty$.

<u>الأستاذ بلجودي حمو</u>

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

x	-1	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C) يقع فوق المستقيم (Δ)	(C) يقطع (Δ) في $A(0;0)$	(C) يقع تحت المستقيم (Δ)

3) .أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) الموازي لـ (Δ) .

$$f'(x)=-2 \Rightarrow \frac{-2x^2-4x-1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=-2 \Rightarrow -2x^2-4x-1-\ln(x+1)=-2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow -2x^2-4x-1-\ln(x+1)=-2x^2-4x-2 \Rightarrow \ln(x+1)=1 \Rightarrow x=e-1$$

$$(T): y=f'(e-1)(x-e+1)+f(e-1)$$

$$\begin{cases} f'(e-1)=-2 \\ f(e-1)=-2e+2+\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

$$(T): y=-2(x-e+1)-2e+2+\frac{1}{e}$$

$$(T): y=-2x+\frac{1}{e}$$

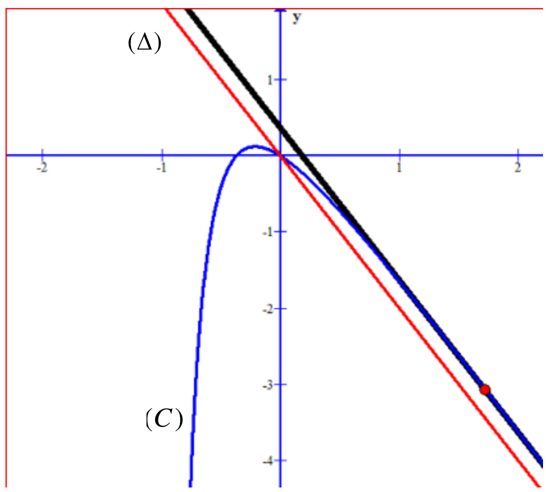
4) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين احدهما معدوم و الأخر β حيث $-0.4\prec\beta\prec-0.3$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

المعادلة $f(0)=0$; ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا معدوما.

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha[$ و من ثم على $[-0.4;-0.3]$ و لدينا $f(-0.4)=-0.05\prec0$ و $f(-0.3)=0.09\succ0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-0.4\prec\beta\prec-0.3$.

ب) أنشئ (C) و (Δ) و (T) . ($f(\alpha)=0.2$)



5) ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=-2x+m$

m	عدد و إشارة حلول المعادلة
$]-\infty;0[$	حل سالب .
0	حل معدوم
$\left]0;\frac{1}{e}\right[$	حلين موجبين
$\frac{1}{e}$	حل معدوم
$m \succ \frac{1}{e}$	لا توجد حلول

6) أ) جد F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

$$\int f(x)dx=\int -2xdx+\int \frac{1}{x+1}\ln(x+1)dx=-x^2+\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2$$

$$F(x)=-x^2+\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+c$$

ب) احسب بدلالة β مساحة الحيز S من المستوي المحدد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=\beta$.

$$\int_{\beta}^{0} f(x)dx=\left[-x^2+\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_{\beta}^{0}=-\beta^2+\frac{1}{2}(\ln(\beta+1))^2 \quad u.s$$

انتهــي تصحيح الموضوع الأول

الأستاذ : بلجودي حمـــو

الأستاذ بلجودي حمو

التصحيح المقترح للموضوع الثاني

التمرين الأول :

1) الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية $y'+y+1=0$ و الذي يحقق $y(\ln 2)=0$ هو $y=-1-2e^{-x}$. **خطأ**

لأن الحل لا يحقق $y(\ln 2)=0$.

تبرير اخر : ايجاد الحل الخاص $y=2e^{-x}-1$.

2) احتمال الحدث A : $\frac{n^2+n+2}{n^2+5n+6}=\frac{1+\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}=\frac{C_2^2+C_{n+1}^2}{C_{n+3}^2}=P(A)$. **صحيح .**

3) Z عدد مركب حيث $Z=2i$ ، العدد تخيلي صرف . **صحيح لأن** $Arg(z)^{2023}=-\frac{\pi}{2}$

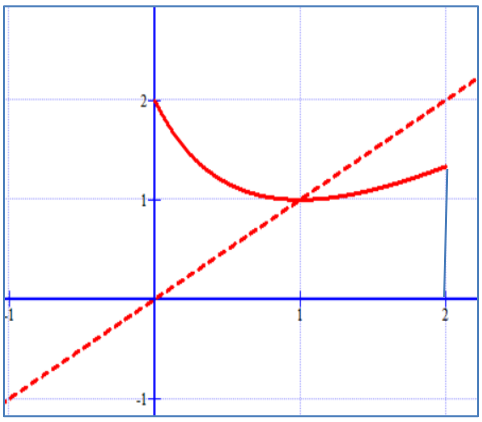
$$Z^{2023}=\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2023}=\left(2^{2023}\times e^{i\frac{2023\pi}{2}}\right)=2^{2023}\times e^{i\left(\frac{2024\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=2^{2023}\times e^{i\left(1012\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=2^{2023}\times e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

الأستاذ : بلجودي حمـــو

4) القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;1]$ هي $m=1-\frac{2}{e}$ **صحيح** .

$$m=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^1=-2e^{-1}-(-1)=1-\frac{2}{e}$$

التمرين الثاني :



1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى:

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

نلاحظ أن المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو 1 ،

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\prec u_n\leq 2$.

$n=0$: $1\prec u_0=2\leq 2$.

$1\prec u_n\leq 2$ و f متزايدة على المجال $[1;2]$ و منه $f(1)\prec f(u_n)\leq f(2)$ و

منه $1\prec u_{n+1}\leq\frac{4}{3}\leq 2$ اذن حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد

طبيعي n: $1\prec u_n\leq 2$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و استنتج تقاربها.

$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n+1}{u_n+1}$ لدينا $-u_n+1\prec 0$ و $u_n+1\succ 0$ اذن $u_{n+1}-u_n\prec 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

الأستاذ بلجودي حمو

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-1=\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n+1}$

$$u_{n+1}-1=\frac{u_n^2-u_n+2}{u_n+1}-1=\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n+1}=\frac{(u_n-1)^2}{u_n+1}$$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\prec\dfrac{u_n-1}{u_n+1}\le\dfrac{1}{3}$ **:** $\dfrac{u_n-1}{u_n+1}=1-\dfrac{2}{u_n+1}$

من أجل كل عدد طبيعي n: $1\prec u_n\le 2$ و منه $2\prec u_n+1\le 3$ و منه $-1\prec\dfrac{-2}{u_n+1}\le\dfrac{-2}{3}$ و منه $0\prec 1-\dfrac{12}{u_n+1}\le\dfrac{1}{3}$.

الأستاذ : بلجودي حمـــو

ثم استنتج أن $0\prec u_{n+1}-1\le\dfrac{1}{3}(u_n-1)$.

$u_{n+1}-1=\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n+1}=\dfrac{(u_n-1)}{u_n+1}(u_n-1)$ و لدينا $0\prec\dfrac{u_n-1}{u_n+1}\le\dfrac{1}{3}$ و منه : $0(u_n-1)\prec\dfrac{(u_n-1)}{u_n+1}(u_n-1)\le\dfrac{1}{3}(u_n-1)$ أي $0\prec u_{n+1}-1\le\dfrac{1}{3}(u_n-1)$.

جـ) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي: $0\prec u_n-1\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ **ثم احسب** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا $0\prec u_{n+1}-1\le\dfrac{1}{3}(u_n-1)$. و منه $0\prec u_1-1\le\dfrac{1}{3}(u_0-1)$ و $0\prec u_2-1\le\dfrac{1}{3}(u_1-1)$ و ....و $0\prec u_n-1\le\dfrac{1}{3}(u_{n-1}-1)$

بضرب المتباينات طرفا لطرف : $0\prec u_n-1\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n(u_0-1)$ اي : $0\prec u_n-1\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

لدينا : $0\prec u_n-1\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ و منه: $1\prec u_n\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1$ و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1=1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

التمرين الثالث :

1) أ) احسب احتمال الأحداث A ، B و C.

$$p(A)=\frac{C_5^3+C_5^3}{C_{11}^3}=\frac{4}{33}\qquad p(B)=\frac{C_6^3+C_5^3}{C_{11}^3}=\frac{2}{11}\qquad p(C)=\frac{C_5^3+C_5^2\times C_6^1+C_5^1\times C_6^2}{C_{11}^3}=\frac{29}{33}$$

ب) بين أن : $p(A\cap B)=\dfrac{1}{33}$ **ثم استنتج** $p_A(B)$ و $p(\overline{A\cup B})$.

$$p(A\cap B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_{11}^3}=\frac{1}{33}\qquad p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1}{4}$$

$$p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-\left[p(A)+p(B)-p(A\cap B)\right]=\frac{8}{11}$$

2.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المتحصل عليها .

-عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي و أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$ **ثم استنتج** $E(X+2023)$.

$X=\{1;2;3\}$

الأستاذ بلجودي حمو

$p(X=1)=p(A)=\frac{4}{33}$ $\qquad p(X=3)=\frac{C_5^1\times C_5^1\times C_1^1}{C_{11}^3}=\frac{5}{33}$ $\qquad p(X=2)=1-\frac{5}{33}-\frac{4}{33}=\frac{8}{11}$

$E(X)=\frac{1\times4+2\times24+3\times5}{33}=\frac{67}{33}$ $\qquad E(X+2023)=E(X)+2023=\frac{66826}{33}$

التمرين الرابع :

I) لتكن الدالة g المعرفة على R بـ : $g(x)=e^x-x+2$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

$g'(x)=e^x-1$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↘	3	↗ $+\infty$

الأستاذ : بلجودي حمـــو

3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.

من أجل كل x من R بـ $g(x)\geq 3\succ 0$ و منه $g(x)\succ 0$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+(x-1)e^{-x}=-\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+xe^{-x}-e^{-x}=+\infty$

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ $f'(x)=e^{-x}g(x)$.

$f'(x)=1+e^{-x}-e^{-x}(x-1)=1+e^{-x}-e^{-x}x+e^{-x}=1+2e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(-x+2+e^x)=e^{-x}g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ $f'(x)\geq 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على R.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}-e^{-x}=0$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

$f(x)-x=(x-1)e^{-x}$

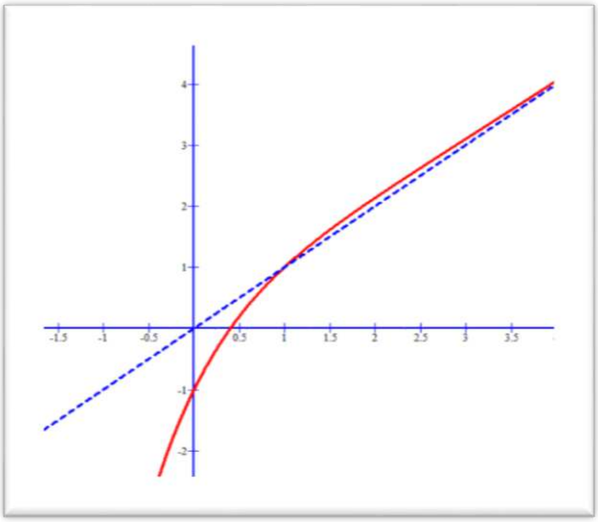
الأستاذ بلجودي حمو

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C) تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) فوق (Δ)

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث** $0.3\prec\alpha\prec0.5$ **ثم فسر النتيجة هندسيا .**

م.ق.م α هي فاصلة نقطة التقاطع مع محور الفواصل .

6) أنشئ (Δ) **و** (C_f)



1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x **من** $\mathbb{R}$ **فإن** $f(x)-x=1+e^{-x}-f'(x)$

$$f(x)-x=x+(x-1)e^{-x}-x=(x-1)e^{-x}$$

$$1+e^{-x}-f'(x)=1+e^{-x}-(-xe^{-x}+2e^{-x}+1)=xe^{-x}-e^{-x}=(x-1)e^{-x}$$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة $x\to f(x)-x$ **على** $\mathbb{R}$ **.**

$$\int(f(x)-x)dx=\int\left(1+e^{-x}-f'(x)\right)dx=x-e^{-x}-f(x)=x-e^{-x}-x-(x-1)e^{-x}=-xe^{-x}$$

2.أحسب بدلالة α ، مساحة الحيز :

$$s=\int_1^\alpha(f(x)-x)dx=\int_1^\alpha\left(-xe^{-x}\right)dx=e^{-1}-\alpha e^{-\alpha}\quad us.$$

انتهـــي الموضوع الثاني

وفقكم الله في بكالوريـــــــــا

2025

الأستاذ بلجودي حمو