الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قسنطينة
المادة: الرياضيات
الشعبة: علوم تجريبية
الإثنين 12 ماي 2025

الثانوية: الحرّية
المستوى: ثالثة ثانوي
المعامل:5
قسم:3ع1+3ع2

دورة ماي 2025 | **البكالوريا البيضاء** | **المدة:3 ساعات وَنصف ساعة**

على المترشحة أن تختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن): من أجل k عدد طبيعي أكبر من أوْ يُساوي 2.

يحتوي صندوق على k كرية حمراء وَ 3 كريات بيضاء، نسحب عشوائيًا وَدون التمييز كريتان من هذا الصندوق على التوالي وَبإرجاع.

(كل الكريات متماثلة وَ لا نُفرّق بينها عند اللمس).

وَتكون شروط اللعبة كالآتي:

- إذا كانت الكريتان المسحوبتين بيضاويين فإنّ اللاعب يخسر $9DA$.
- إذا كانت الكريتان المسحوبتين حمراويين فإنّ اللاعب يخسر $1DA$.
- إذا كانت الكريتان المسحوبتين من لونين مختلفين فإنّ اللاعب يربح $5DA$.

X_k المتغيّر العشوائي الذي يرفق بربحية اللاعب (أي أنّ اللاعب سيربح).

1) أ- أثبتي أنّ: $P(X_k=5)=\frac{6k}{(k+3)^2}$.

ب-عرّفي قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X_k.

2) نعتبر الأمل الرياضياتي $E(X_k)$ للمتغيّر العشوائي X_k، عيّني قيّم k التي من أجلها يتمكن اللاعب من الربح.

التمرين الثاني (5ن):

1) أحسبي $(\sqrt2+\sqrt6)^2$، ثمّ حلّي في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2-2(\sqrt2+\sqrt6)z+16=0 \ldots\ldots\ldots(E)$$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A، B وَ C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B وَ z_C حيث : $z_A=(\sqrt6+\sqrt2)+i(\sqrt6-\sqrt2)$ ، $z_B=1+i\sqrt3$ وَ $z_C=\sqrt2+i\sqrt2$.

أ-أثبتي أنّ: $z_B\times\bar{z}_C=z_A$، ثُمّ إستنتجي أنّ: $z_A\times z_C=4z_B$.

ب-أكتبي كل من z_B وَ z_C على الشكل المثلثي.

جـ -إستنتجي الشكل الأسي لـ z_A.

3) لتكن D النقطة التي لاحقتها z_D، حيث: $z_D=z_A^4$ ، M نقطة لاحقتها z وَ M' نقطة لاحقتها z' حيث: $z'=\frac{1}{4}z_Az$.

أ-ما طبيعة التحويل؟ أذكري عناصره المميّزة.

ب-عيّني صورة النقطة C بالتحويل النقطي.

جـ - ما طبيعة المثلث OBC؟ علّلي الإجابة.

د- أثبتي أنّ: $z_A^4 = 128z_B$ ، ثُمّ إستنتجي أنّ النقط O ، B وَ D في إستقامية.

التمرين الثالث (4ن): لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول: $u_0 = 2$، وَمن أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}{u_n}^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$.

1) أ- أحسبي u_1 وَ u_2 (أكتبي الحدّين على شكل كسرين غير قابلين للإختزال)، وَ u_3 وَ u_4 (بقيّم تقريبية إلى 10^{-5}).

ب- ضعي تخمينًا حول إتجاه تغيّر وَتقارب المتتالية (u_n).

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 3$.

أ-أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

ب- برهني بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أنّ: $-1 \leq v_n \leq 0$.

جـ - أدرسي إتجاه تغيّر المتتالية (v_n)، ثُمّ إستنتجي أنّ المتتالية (v_n) متقاربة.

3) لتكن ℓ نهاية المتتالية (v_n)، بيّني أنّ: $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$، ثُمّ عيّني قيمة ℓ.

4) هل التخمين في السؤال الأول محقّق؟

التمرين الرابع (7ن):

I) 1) بما أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، برهني أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

2) إستنتجي أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، فإنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$.

3) نعتبر الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

أ- أدرسي تغيّرات الدالة g.

ب- أحسبي $g(1)$ ثُمّ إستنتجي إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$، وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَالمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$، (وحدة الطول: $2cm$).

1) أحسبي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- بيّني أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلًا (Δ)، يُطلب تعيين معادلة له.

ب- أدرسي الوضع النسبي للمنحنى (C_f) وَالمستقيم (Δ).

3) أكتبي $f'(x)$ بدلالة $g(x)$، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

4) إستنتجي إتجاه تغيّر الدالة f ، ثُمّ شكّلي جدول تغيّرات الدالة f.

5) أرسمي كلا من (Δ) وَ (C_f).

III) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وَبالمستقيمات: $y = x$، $x = 1$ وَ $x = \alpha$.

1) أحسبي $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α، (حيث: α عدد حقيقي أكبر تمامًا من 1)، ثُمّ أحسبي النهاية $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$.

2) لتكن: $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha) = \ell$ ، بيّني أنّ: $\ell = \mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

يحتوي كيس على 8 كريات بيضاء وَ n كرية سوداء (حيث: n عدد طبيعي أكبر أَوْ يُساوي 2).
(الكريات لا نفرّق بينها عند اللمس).

1) يقوم اللاعب بسحب كريتين على التوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الكيس، حيث:
- يربح اللاعب $1DA$ من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة.
- يخسر اللاعب $2DA$ من أجل كل كرية سوداء مسحوبة.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح اللاعب.

أ- عيّني القيّم الممكنة للمتغيّر العشوائي X.

ب- عرّفي قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X.

جـ- أحسبي أمله الرياضياتي بدلالة n.

د- هل توجد قيمة للعدد n حتى يكون الأمل الرياضياتي معدومًا؟ (إن كانت الإجابة نعم، جِدي n).

2) نفرض أنّنا سحبنا كريتين على التوالي دون إرجاع، وَلْتكن الحادثتين:

A_n: "الحصول على كريتين من نفس اللون".

B_n: "الحصول على كريتين من لونين مختلفين".

أ- أحسبي $P(A_n)$ بدلالة n، ثُمّ أحسبي $\lim_{n\to+\infty} P(A_n)$. فسّري النتيجة.

ب- أحسبي $P(B_n)$ بدلالة n، ثُمّ أحسبي $\lim_{n\to+\infty} P(B_n)$. فسّري النتيجة.

التمرين الثاني (5ن):

1) أحسبي $(1+\sqrt{3})^2$، ثُمّ حلّي في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{1}{2}=0\ \ldots\ldots\ldots.(E)$$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A، B وَ C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B وَ z_C حيث : $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ وَ $z_C=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

أ-أثبتي أنّ: $z_C=\frac{z_A}{z_B}$.

ب-أكتبي كل من z_A وَ z_B على الشكل المثلثي.

جـ -إستنتجي الشكل الأسي لـ z_C.

د-إستنتجي أنّ: $\tan\frac{7\pi}{12}=-2-\sqrt{3}$.

3) لتكن D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة: $2i\sqrt{3}$.

أ- بيّني أنّ: $z_D=\bar{z}_B$.

ب- أثبتي أنّ: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right)=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ (k\in\mathbb{Z})$، مستنتجةً قيس الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}}\right)$.

جـ - بيّني أنّ: $OD=OB$ ، ثُمّ إستنتجي طبيعة المثلث OBD.

د- إستنتجي صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وَزاويته $-\frac{2\pi}{3}$.

التمرين الثالث (4ن): لتكن (u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأول $u_0=\frac{3}{2}$، وَمن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$.

1) أ- أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$.

ب- بيّني أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ- إستنتجي أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، أحسبي نهايتها.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة بحدّها الأول: $v_0 = 1$، وَبالعلاقة التراجعية: $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n}$.

أ-أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$.

ب-برهني بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $v_n \geq \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$.

جـ- أحسبي النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3) نضع: $S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \cdots + \frac{1}{v_n^2}\right)$، حيث: $n \geq 1$.

أ- أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$، $\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \cdots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{45}{2}\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$.

ب-إستنتجي $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

<u>التمرين الرابع (7ن):</u> نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$.

وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَالمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$، (وحدة الطول: $2cm$).

1) أ-أحسبي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّني أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلًا (Δ) عند $(-\infty)$، يُطلب تعيين معادلة له.

جـ - أدرسي الوضع النسبي للمنحنى (C_f) وَالمستقيم (Δ).

2) أ- أحسبي $f'(x)$، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب-إستنتجي إتجاه تغيّر الدالة f ،ثُمّ شكّلي جدول تغيّراتها.

جـ - أثبتي أنّ (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.

3) أثبتي أنّ المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

4) بيّني أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسًا (T) يُوازي المقارب المائل (Δ)،يُطلب تعيين معادلة له.

5) أرسمي كلا من (Δ) ، (T) وَ(C_f). (نأخذ: $f(3.8) \simeq -7.5$).

6) ناقشي حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$.

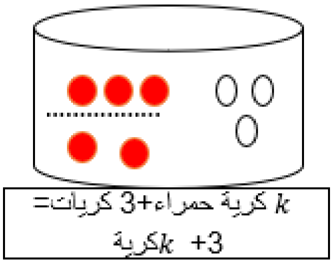
7) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وَبالمستقيمات: $y = -x + \frac{5}{2}$، $x = 1$ وَ $x = \alpha$. أحسبي $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α.

إنتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصّل لموضوع إختبار مادة الرياضيات /علوم تجريبية/بكالوريا دورة ماي2025

<table>
<tr><th>الموضوع الأول –التصحيح المفصّل-</th><th>العلامة</th></tr>
<tr><td>

التمرين الأول: يحتوي صندوق على k كرية حمراء وَ 3 كريات بيضاء، (حيث:$k \geq 2$).



آلية السحب: سحب كريتين $(p = 2)$ من $(n = k + 3)$ كرية عشوائيًا على التوالي وَبإرجاع (نستخدم قائمة، أي:$(card\Omega = (k + 3)^2)$.

X_k المتغيّر العشوائي الذي يرفق بربحية اللاعب (أي أنّ اللاعب سيربح).

1) أ- إثبات أنّ: $P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$: أي أنّ اللعب يربح $5DA$،مما يعني أنّه سحب 1كرية حمراء من k (أي:k^1) وَ 1 كرية بيضاء من 3(أي:3^1)، وَالترتيب في هذه الحالة مهم ($\frac{2!}{1!\times1!}$،بيضاء وَحمراء أَوْ حمراء وَبيضاء)، فيكون:$P(X_k = 5) = \frac{2!}{1!\times1!} \times \frac{k^1\times3^1}{(k+3)^2}$ ، إذن:$P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.

</td><td>(4ن)
0.5
0.5
0.25</td></tr>
<tr><td>

ب-تعريف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X_k: حسب اللعبة فإنّ:

-إذا تم سحب كريتين بيضاويين (أي: 2 بيضاء من 3،معناه:3^2) فإنّ اللاعب يخسر $9DA$ مما يعني أنّ $(X_k = -9)$.

-إذا تم سحب كريتين حمراويين (أي: 2 حمراء من k،معناه:k^2) فإنّ اللاعب يخسر $1DA$ مما يعني أنّ $(X_k = -1)$.

-إذا تم سحب كرية حمراء من k (أي:k^1) وَكرية بيضاء من 3(أي:3^1)، (أي: بيضاء وَحمراء أَوْ حمراء وَبيضاء وَالترتيب مهم) فإنّ اللاعب يربح $5DA$ مما يعني أنّ:$(X_k = +5)$.

وَمنه:$X_k(\Omega) \in \{-9; -1; 5\}$. وَيكون قانون الإحتمال:

إذن ،
$$\begin{cases} P(X_k = -9) = \frac{3^2}{(k+3)^2} = \frac{9}{(k+3)^2} \\ P(X_k = -1) = \frac{k^2}{(k+3)^2} \\ P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2} \text{ ،(حسب أ)} \end{cases}$$

<table>
<tr><td>X_i</td><td>-9</td><td>-1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>P_i</td><td>$\frac{9}{(k+3)^2}$</td><td>$\frac{k^2}{(k+3)^2}$</td><td>$\frac{6k}{(k+3)^2}$</td></tr>
</table>

</td><td>0.25
0.25
0.25
0.5
0.5</td></tr>
<tr><td>

2) نعتبر الأمل الرياضياتي $E(X_k)$ للمتغيّر العشوائي X_k، تعيين قيّم k التي من أجلها يتمكن اللاعب من الربح: نعلم أنّ:$E(X_k) = \sum X_i\, P_i = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2}$

وَمنه:$E(X_k) = \frac{-81-k^2+30k}{(k+3)^2} = \frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2}$ ، وَيتمكن اللاعب من الربح إذا كان:$E(X_k) > 0$

أي:$-k^2 + 30k - 81 > 0$ ، وَبإعتبارها معادلة:$-k^2 + 30k - 81 = 0 \rightarrow \Delta = 576$ ،

وَمنه:$k' = \frac{-30-24}{-2} = 27; k'' = \frac{-30+24}{-2} = 3$، وَتكون الإشارة موجبة لما $k \in]3; 24[$.

وَبما أنّ:k عدد طبيعي، فإنّ:

$k \in \{4 ; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26\}$

</td><td>0.25
0.25
0.25
0.25</td></tr>
</table>

(5ن)

التمرين الثاني:

1) حساب $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$: لدينا: $8+4\sqrt{3} = 6+2\sqrt{12}+2 = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$. 0.25

- حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0 \ldots\ldots\ldots (E)$$

نحسب المميّز Δ حيث: $\Delta= b^2-4ac=[-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})]^2-4\times1\times16$، أي:

$\Delta= 4(2+2\sqrt{12}+6)-64=4[2+2\sqrt{12}+6-16]=4[-8+4\sqrt{3}]$

وَمنه: $\Delta= -4(6-2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2)=-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=[2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i]^2$. 0.25

بما أنّ: $\Delta\neq 0$، فإنّ: (E) تقبل حلين مترافقين:

(بوضع: $\delta=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$ أوْ $\delta=-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$، حيث: $\delta^2=\Delta$). 0.25

وَمنه:

$$\begin{cases} z'=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2}=(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})i \\ z''=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})+2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2}=(\sqrt{2}+\sqrt{6})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i \end{cases}$$ 0.25

إذن: $S=\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})i;(\sqrt{2}+\sqrt{6})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A، B وَ C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ وَ $z_C=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

أ- إثبات أنّ: $z_B\times\bar{z}_C=z_A$:

لدينا: $z_B\times\bar{z}_C=(1+i\sqrt{3})\overline{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$ ، وَمنه:

$z_B\times\bar{z}_C=\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})=z_A$ ، 0.25

إذن: $z_B\times\bar{z}_C=z_A$، وَهو المطلوب.

- إستنتاج أنّ: $z_A\times z_C=4z_B$:

$z_A\times z_C=[(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})](\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ ، أي: 0.25

$z_A\times z_C=\sqrt{12}+2+i\sqrt{12}+2i+i\sqrt{12}-2i-\sqrt{12}+2=4+2i\sqrt{12}$ ، وَمنه:

$z_A\times z_C=4+2i2\sqrt{3}=4(1+i\sqrt{3})$، إذن: $z_A\times z_C=4z_B$.

ب-كتابة كل من z_B وَ z_C على الشكل المثلثي: لدينا: $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، وَمنه:

$$\begin{cases} r_B=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2 \\ \arg(z_B)=\theta_B\rightarrow\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\rightarrow\theta_B=\frac{\pi}{3}+2\pi k;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$ 0.25 0.25 0.25

، أي: $z_B=\left[2;\frac{\pi}{3}\right]$

إذن: $z_B=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$.

لدينا: $z_C=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ، وَمنه:

$$\begin{cases} r_C=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=2 \\ \arg(z_C)=\theta_C\rightarrow\begin{cases}\cos\theta_C=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_C=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\rightarrow\theta_C=\frac{\pi}{4}+2\pi k\,;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$ 0.25 0.25

، أي: $z_C=\left[2\,;\frac{\pi}{4}\right]$

إذن: $z_C=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$. 0.25

جـ -إستنتاج الشكل الأسي لـ z_A: حسب -أ- فإنّ: $z_A = z_B \times \bar{z}_C$ ، وَحسب ما سبق فإنّ: $\begin{cases} z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_C = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{\text{خواص المرافق}} \bar{z}_C = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$ ، فيكون: $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$. أي: $z_A = 4e^{i\frac{(4\pi-3\pi)}{3\times4}} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، إذن: $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$.	0.25 0.25
3) لتكن D النقطة التي لاحقتها z_D، حيث: $z_D = z_A^4$ ، M نقطة لاحقتها z وَ M' نقطة لاحقتها z' حيث: $z' = \frac{1}{4}z_A z$. **أ-ما طبيعة التحويل؟** لدينا: $z' = \frac{1}{4}z_A z = z' = \frac{1}{4} \times 4e^{i\frac{\pi}{12}} \times z = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، أي: $z' = e^{i\frac{\pi}{12}}z$. من الشكل: $z' = az + b$، حيث: $\begin{cases} a = e^{i\frac{\pi}{12}} \\ b = 0 \end{cases}$، وَبما أنّ: $\begin{cases} a \in \mathbb{C}^* \\ \lvert a \rvert = 1 \end{cases}$ ، إذن: التحويل عبارة عن دوران. **ـالعناصر المميّزة للتحويل النقطي:** لدينا: $a = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، وَمنه: $\arg(a) = \frac{\pi}{12} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$. مما يعني أنّ زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{12}$، وَمركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة: $z_O = \frac{b}{1-a} = 0$. إذن: التحويل عبارة عن دوران، زاويته $\frac{\pi}{12}$ وَمركزه النقطة الصامدة $O(0;0)$.	0.25 0.25
ب-تعيين صورة النقطة C بالتحويل النقطي: لدينا: $z' = z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{12}}z_C = e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4})} = 2e^{i\frac{4\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، إذن: $z_{C'} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = z_B$.	0.25
جـ - ما طبيعة المثلث OBC؟ مع التعليل: لدينا حسب ما سبق فإنّ: $R(z_C) = z_B$ ، مما يعني أنّ: $\begin{cases} OC = OB = 2 \\ (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12} + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ، إذن: OBC مثلث متساوي الساقين.	0.25
د- إثبات أنّ: $z_A^4 = 128z_B$: لدينا: $z_A^4 = \left(4e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4 = 4^4 \times e^{i\frac{4\pi}{12}} = 256e^{i\frac{\pi}{3}} = 256(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ وَمنه: $z_A^4 = 256\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 128 \times 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. إذن: $z_A^4 = 128z_B$. **- إستنتاج أنّ النقط O، B وَ D في إستقامية:** حسب ما سبق: $\begin{cases} z_D = z_A^4 (\text{حسب س 3}) \\ z_A^4 = 128z_B (\text{حسب د}) \end{cases}$ ، فإنّ: $\frac{z_D - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A^4}{z_B} = \frac{128z_B}{z_B} = 128 \in \mathbb{R}$ ، إذن: النقط O، B وَ D في إستقامية.	0.25 0.25
التمرين الثالث: لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول: $u_0 = 2$، وَمن أجل كل عدد طبيعي n بــ: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}{u_n}^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$. **1) أ- حساب u_1 وَ u_2 (أكتبي الحدّين على شكل كسرين غير قابلين للإختزال)، وَ u_3 وَ u_4 (بقيّم تقريبية إلى 10^{-5}):** لدينا: من أجل: $n = 0$، فإنّ: $u_{0+1} = -\frac{1}{2}{u_0}^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 \times 2 - \frac{3}{2}$. وَمنه: $u_1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{8-3}{2}$، إذن: $u_1 = \frac{5}{2} = 2.5$. من أجل: $n = 1$، فإنّ: $u_{1+1} = -\frac{1}{2}{u_1}^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{25}{4} + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$. وَمنه: $u_2 = \frac{-25}{8} + \frac{15-3}{2} = \frac{-25+48}{8}$، إذن: $u_2 = \frac{23}{8} = 2.875$. من أجل: $n = 2$، فإنّ: $u_{2+1} = -\frac{1}{2}{u_2}^2 + 3u_2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{529}{64} + 3 \times \frac{23}{8} - \frac{3}{2}$. وَمنه: $u_3 = \frac{-529}{128} + \frac{69-24}{8} = \frac{-529+912}{128} = \frac{383}{128}$، إذن: $u_3 = 2.9921875 \simeq 2.992188$.	**(4ن)** 0.25 0.25 0.25

من أجل:$n = 3$، فإنّ: $u_{3+1} = -\frac{1}{2}{u_3}^2 + 3u_3 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{383}{128}\right)^2 + 3\times\frac{383}{128} - \frac{3}{2}$. إذن:$u_4 = 2.999969482 \simeq 2.99997$.	0.25
ب- وضع تخمينًا حول إتجاه تغيّر وَتقارب المتتالية (u_n): حسب حساب الحدود فإنّ: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ ، مما يعني أنّ المتتالية متزايدة، كما أنّ الحدود تقترب شيئًا فشيئًا نحو 3 ، فهي متقاربة نحو 3.	0.25 0.25
2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـــ:$v_n = u_n - 3$. **أ-إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ:$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$:** لدينا:$v_n = u_n - 3$ ، وَمنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}{u_n}^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}{u_n}^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$ ، أي: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}{u_n}^2 + 3\times\frac{-2}{-2}\times u_n - \frac{9}{2} = \frac{-1}{2}({u_n}^2 - 6u_n + 9) = \frac{-1}{2}(u_n - 3)^2$ إذن:$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.	0.25
ب- البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أنّ:$-1 \le v_n \le 0$: - نضع الخاصية:$P(n) : -1 \le v_n \le 0 \, ; n \in \mathbb{N}$: - من أجل $n = 0$، فإنّ: $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ وَ $-1 \le v_0 = -1 \le 0$،- (فعلًا: $(-1 \in [-1\,;0])$، وَمنه:$P(0)$ محققة. -نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n، أي:$-1 \le v_n \le 0$. -نُحاول إثبات صحة الخاصية من أجل $(n+1)$، أي:$-1 \le v_{n+1} \le 0$ ؟ -لدينا فرضًا:$-1 \le v_n \le 0$ ، أي:$-1 \le u_n - 3 \le 0$ ، وَبما أنّ الأطراف سالبة، بتربيعها نجد أنّ: $0 \le (u_n - 3)^2 \le 1$ ، أي:$0 \le v_n^2 \le 1$ وَبضرب أطراف هذه الأخيرة في $-\frac{1}{2} < 0$، نجد أنّ: $-1 \le -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}v_n^2 \le 0$ ، وَمنه وَبالتعدي، فإنّ:$-1 \le v_{n+1} \le 0$. إذن: وَحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ:$-1 \le v_n \le 0$.	0.25 0.25 0.25
جـ - دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (v_n): لندرس إشارة $v_{n+1} - v_n$، حيث:$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n(\frac{1}{2}v_n + 1)$ ، وَحسب ما سبق، فإنّ:$-1 \le v_n \le 0$ ، وَمنه: $0 \le -v_n \le 1$. أي:$-v_n > 0$ ...(1). وَمن جهة أخرى، وَبما أنّ:$-1 \le v_n \le 0$ ، بضرب الأطراف في $\frac{1}{2} > 0$، نجد أنّ: $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}v_n \le 0$ ، وَبإضافة 1 نحصل على:$\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}v_n + 1 \le 1$ ، أي: $(\frac{1}{2}v_n + 1) > 0$ ...(2). من (1) وَ(2)، نجد أنّ:$-v_n(\frac{1}{2}v_n + 1) \ge 0$ ، إذن:$v_{n+1} - v_n > 0 \, ; \forall n \in \mathbb{N}$. وَمنه:(v_n) متزايدة تمامًا على $\mathbb{N}$. **- إستنتاج أنّ المتتالية (v_n) متقاربة:** لدينا (حسب -ب-)$v_n \le 0$ ،مما يعني أنّ المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى بالصفر، كما أنها متزايدة تمامًا على $\mathbb{N}$، إذن:(v_n) متقاربة (حسب مبرهنة ما). **3) لتكن ℓ نهاية المتتالية (v_n)، إثبات أنّ: $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$: تعيين قيمة ℓ:** بما أنّ المتتالية (v_n) متقاربة وَنهايتها ℓ ، فإنّ:$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$. وَبما أنّ:$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$ ، (حسب س2-أ-)، فإنّ:$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}v_n^2\right)$ ، وَبالتعويض نجد أنّ:$\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$ ، وَهو المطلوب. - تعيين قيمة ℓ: لنحل المعادلة:$\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$: حيث:$\ell + \frac{1}{2}\ell^2 = 0 \to \ell\left(1 + \frac{1}{2}\ell\right) = 0$. إما $\left(1 + \frac{1}{2}\ell = 0 \to \frac{1}{2}\ell = -1 \to \ell = -2 \notin [-1\,;0]\right)$، (مرفوضة لأنّ:$-1 \le v_n \le 0$) أوْ$(\ell = 0 \in [-1\,;0])$، (مقبولة لأنّ:$-1 \le v_n \le 0$)، إذن:$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell = 0$.	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25

4) هل التخمين في السؤال الأول محقّق؟

المتتالية (u_n) متزايدة تمامًا (لأنّ: $u_n = v_n + 3$ وَالمتتالية (v_n) متزايدة حسب السؤال 2-جـ-). 0.25

وَلدينا: $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}(u_n - 3) = 0$ ، وَمنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$. (نعم، المتتالية (u_n) متقاربة نحو 3). إذن: التخمين محقق.

التمرين الرابع: (7ن)

I) 1) بما أنّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ ، البرهان أنّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$:

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، فإنّ: $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln x}}{\ln x}}$، وَبوضع: $X = \ln x$، حيث: 0.25

$\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$. وَعلمًا أنّ: $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X} = +\infty$ ، أي: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^{\ln x}}{\ln x}} = 0$. 0.25

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

2) إستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، فإنّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$:

ليكن n عدد طبيعي أكبر أوْ يُساوي 2، وَمن أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، لدينا:

$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ ، وَبما أنّ: $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}} = 0\end{cases}$ ، فإنّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$. وَهو المطلوب. 0.25

3) نعتبر الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

أ- دراسة تغيّرات الدالة g:

-**مجموعة التعريف:** $D_g =]0;+\infty[$. (من المعطيات). 0.25

-**النهايات:**

$$\begin{cases}\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} x^3 - 1 + 2\ln x = -\infty\\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 1 + 2\ln x = +\infty\end{cases}$$ 0.25

-**إتجاه التغيّر:** g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ كمجموع دوال قابلة للإشتقاق، حيث: 0.25

$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$ ،

وَمن أجل كل x من $]0;+\infty[$، فإنّ: $g(x) > 0$ ، لأنّ: $\begin{cases}3x^2 > 0\\ \frac{2}{x} > 0\end{cases}$ ، $\forall x \in]0;+\infty[$. 0.25

إذن: g متزايدة تمامًا على $]0;+\infty[$.

-**جدول التغيّرات:** 0.25

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

ب- حساب $g(1)$: 0.25

لدينا: $g(1) = 1^3 - 1 + 2\ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$ ، إذن: $g(1) = 0$.

- **إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:** بما أنّ: $g(1) = 0$ ، فإنّ: 0.25

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$:

1) حساب $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: لدينا:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[x - \frac{\ln x}{x^2}\right] = +\infty$ ، لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \end{cases}$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$. 0.25

وَمنه: $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي يُوازي حامل محور التراتيب (yy') عند $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \frac{\ln x}{x^2}\right] = +\infty$ ، لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$ ،

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 0.25

2) أ- إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلًا (Δ)، يُطلب تعيين معادلة له:

نلاحظ أنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x^2}\right] = 0$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] =$ مما يعني أنّ البيان (C_f) مستقيم مقارب مائل $(\Delta): y = x$. 0.25

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) وَالمستقيم (Δ):

أي ندرس إشارة $f(x) - x$، حيث:

$f(x) - x = -\frac{\ln x}{x^2} = 0 \to \begin{cases} \ln x = 0 \to x = e^0 = 1 \\ x^2 > 0; \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$ ، أما إشارتها:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$	

مما يعني أنّ: - (C_f) يقع أسفل المقارب (Δ) من أجل $x \in]0; 1[$. 0.25

- (C_f) يقطع المقارب (Δ) من أجل $x = 1$ ، حيث: $(C_f) \cap (\Delta) = \{(1; 1)\}$. 0.25
- (C_f) يقع أعلى المقارب (Δ) من أجل $x \in]1; +\infty[$. 0.25

3) كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f:

f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ كمجموع وَحاصل قسمة دوال قابلة للإشتقاق، حيث:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x^2} - 2x \times \ln x}{x^4} = 1 - \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln x)}{\cancel{x} \times x^3} = 1 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

وَمنه: $f'(x) = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$. 0.25

4) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، وَحسب الجزء الأول، فإنّ:

0- $f'(x) <$ لما $x \in]0; 1[$، وَمنه: f متناقصة تمامًا على $]0; 1[$. 0.25

0- $f'(x) >$ لما $x \in]1; +\infty[$، وَمنه: f متزايدة تمامًا على $]1; +\infty[$. 0.25

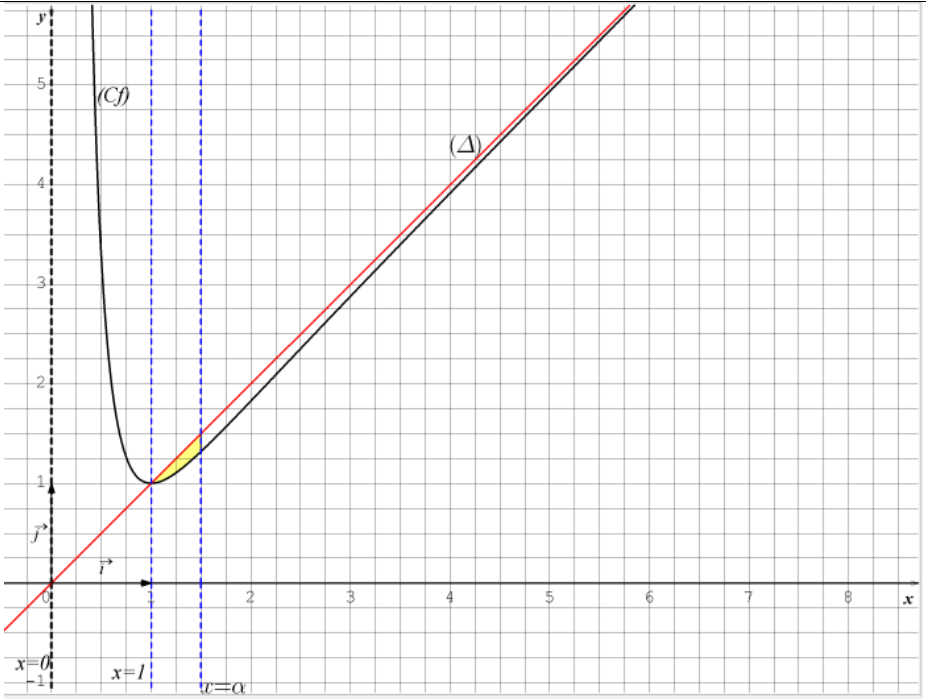
-تشكيل جدول تغيّرات الدالة f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

0.25

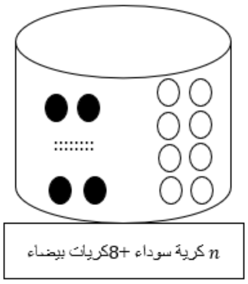
حيث: $f(1) = 1$.

5) رسم كلا من (Δ) وَ (C_f):

	0.25 0.25
III) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ وَبالمستقيمات: $y=x$، $x=1$ وَ $x=\alpha$. **1) حساب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α، (حيث: α عدد حقيقي أكبر تمامًا من 1):** بما أنّ البيان $\left(C_f\right)$ يقع تحت المقارب المائل (Δ) على $[1;\alpha]$، فإنّ: $\mathcal{A}(\alpha)=\Vert\vec{i}\Vert\times\Vert\vec{j}\Vert\times\int_1^\alpha[y-f(x)]dx=4\int_1^\alpha\frac{\ln x}{x^2}\,dx$ ، وَحسب التكامل بالتجزئة، فإنّ: $\begin{cases}u(x)=\ln x\to u'(x)=\frac{1}{x}\\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\to v(x)=-\frac{1}{x}\end{cases}$ ، وَمنه: $\int_1^\alpha\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\alpha+\int_1^\alpha\frac{1}{x^2}dx$ ، أي: $\int_1^\alpha\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1+\ln x}{x}\right]_1^\alpha=-\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}+\frac{1+\ln 1}{1}=\frac{\alpha-1-\ln\alpha}{\alpha}$. إذن: $\mathcal{A}(\alpha)=4\left(\frac{\alpha-1-\ln\alpha}{\alpha}\right)cm^2$. حساب النهاية $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$: لدينا: $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}4\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{\ln\alpha}{\alpha}\right)=1$. إذن: $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=4$.	0.25 0.25 0.25 0.25
2) لتكن $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=\ell$ ، إثبات أنّ: $\ell=\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)$: بما أنّ البيان $\left(C_f\right)$ يقع فوق المقارب المائل (Δ) على $\left[\frac{1}{e};1\right]$، فإنّ: $\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)=\Vert\vec{i}\Vert\times\Vert\vec{j}\Vert\times\int_{\frac{1}{e}}^1[f(x)-y]dx=4\int_{\frac{1}{e}}^1-\frac{\ln x}{x^2}\,dx=4\left(1-\frac{1}{\frac{1}{e}}-\frac{\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}\right)$ أي: $\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)=4(1-e+e)=4=\ell$. إذن: $\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)=\ell=4$.	0.25 0.25

الموضوع الثاني ـالتصحيح المفصّل- | العلامة

التمرين الأول: 8 كريات بيضاء وَ n كرية سوداء، (حيث: $n \geq 2$). **(4ن)**



آلية السحب: سحب كريتين ($p = 2$) من ($n = n + 8$) كرية عشوائيًا على التوالي وَبإرجاع (نستخدم قائمة، أي: $card\Omega = (n+8)^2$). 0.25

1) يقوم اللاعب بسحب كريتين على التوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الكيس، حيث:

- يربح اللاعب $1DA$ من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة.
- يخسر اللاعب $2DA$ من أجل كل كرية سوداء مسحوبة.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح اللاعب.

أـ تعيين القيّم الممكنة للمتغيّر العشوائي X: حسب اللعبة فإنّ: 0.25

-إذا تم سحب كريتين بيضاويين (أي: 2 بيضاء من 8،معناه: 8^2) فإنّ اللاعب يربح $2DA$ مما يعني أنّ ($X = 1 + 1 = +2$). 0.25

-إذا تم سحب كريتين سوداويين (أي: 2 سوداء من n،معناه: n^2) فإنّ اللاعب يخسر $4DA$ مما يعني أنّ ($X = -2 - 2 = -4$). 0.25

-إذا تم سحب كرية سوداء من n (أي: n^1) وَكرية بيضاء من 8 (أي: 8^1)، (أي: NB أوْ BN وَالترتيب مهم) فإنّ اللاعب يخسر $1DA$ مما يعني أنّ: ($X = 1 - 2 = -1$) . 0.25

وَمنه: $X(\Omega) \in \{-4; -1; 2\}$.

بـتعريف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X: حسب اللعبة فيكون قانون الإحتمال:

$$\begin{cases} P(X = -4) = \frac{n^2}{(n+8)^2} \\ P(X = -1) = \frac{2!}{1!\times 1!}\frac{n^1 \times 8^1}{(n+8)^2} = \frac{16n}{(n+8)^2} \\ P(X = 2) = \frac{8^2}{(n+8)^2} = \frac{64}{(n+8)^2} \end{cases}$$

، إذن: 0.25 / 0.25 / 0.25

X_i	-4	-1	2
P_i	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$

جـحساب الأمل الرياضياتي بدلالة n:

نعلم أنّ: $E(X) = \sum X_i P_i = -4 \times \frac{n^2}{(n+8)^2} + (-1) \times \frac{16n}{(n+8)^2} + 2 \times \frac{64}{(n+8)^2}$.

وَمنه: $\frac{4(-n^2-4n+32)}{(n+8)^2} = \frac{-4n^2-16n+128}{(n+8)^2} = E(X)$ ، إذن: $E(X) = \frac{4(-n^2-4n+32)}{(n+8)^2}$. 0.25

دـ هل توجد قيمة للعدد n حتى يكون الأمل الرياضياتي معدومًا؟ $E(X) = \frac{4(-n^2-4n+32)}{(n+8)^2} = 0$،

تُكافئ: $-n^2 - 4n + 32 = 0$، (لأنّ: $\begin{cases} 4 \neq 0 \\ (n+8)^2 \neq 0; \forall n \geq 2 \end{cases}$).

$-n^2-4n+32=0$ ، معناه أنّ: $\Delta=(-4)^2-4(-1)\times 32=144=12^2>0$ ، يوجد حلان متمايزان هما: $\begin{cases} n_1=\frac{4-12}{-2}=\frac{-8}{-2}=4\in\mathbb{N}.\ (\text{مقبول}) \\ n_1=\frac{4+12}{-2}=\frac{16}{-2}=-8\notin\mathbb{N}.\ (\text{مرفوض}) \end{cases}$. إذن: يكون الأمل الرياضياتي معدومًا من أجل $n=4$.	0.25
2) نفرض أنّنا سحبنا كريتين على التوالي دون إرجاع، وَلتكن الحادثتين: A_n:"الحصول على كريتين من نفس اللون". B_n:"الحصول على كريتين من لونين مختلفين". **أ– حساب $P(A_n)$ بدلالة n:** **آلية السحب:** سحب كريتين $(p=2)$ من $(n=n+8)$ كرية عشوائيًا على التوالي دون إرجاع (نستخدم ترتيبة). وَمنه: $card\Omega=A_{n+8}^2=\frac{(n+8)!}{(n+8-2)!}=\frac{(n+8)(n+7)\cancel{(n+6)!}}{\cancel{(n+6)!}}=(n+8)(n+7)$. من جهة أخرى: الحصول على كريتين من نفس اللون بمعنى كريتين بيضاويين من 8، (أي: A_8^2) أَوْ الحصول على كريتين سوداويين من n،(أي: A_n^2). وَمنه: $P(A_n)=\frac{cardA_n}{card\Omega}=\frac{A_8^2+A_n^2}{A_{n+8}^2}=\frac{\frac{8!}{(8-2)!}+\frac{n!}{(n-2)!}}{(n+8)(n+7)}=\frac{\frac{8\times7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}}+\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}}{(n+8)(n+7)}=\frac{56+n^2-n}{n^2+8n+7n+56}$ إذن: $P(A_n)=\frac{n^2-n+56}{n^2+15n+56}$. **- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A_n)$:** لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+56}{n^2+15n+56}=\lim\limits_{n\to+\infty}P(A_n)$ ، إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A_n)=1$. **- تفسير النتيجة:** عندما يكون n كبير بالقدر الكافي، بمعنى يكون عدد الكريات السوداء كبير بالقدر الكافي، فيكون حادثة الحصول على كريتين سوداويين حادثة أكيدة وَإحتماله مساويًا لـ 1.	0.25 0.25 0.25 0.25
ب– حساب $P(B_n)$ بدلالة n: الحصول على كريتين من لونين مختلفين بمعنى كرية بيضاء من 8، (أي: A_8^1) وَكرية سوداء من n،(أي: A_n^1)، (كما أنّ الترتيب مهم قد تكون بيضاء وَسوداء أَوْ سوداء وَبيضاء، حيث: $\frac{2!}{1!\times1!}$). وَمنه: $P(B_n)=\frac{cardB_n}{card\Omega}=\frac{2!}{1!\times1!}\times\frac{A_8^1\times A_n^1}{A_{n+8}^2}=2\times\frac{\frac{8!}{(8-1)!}\times\frac{n!}{(n-1)!}}{(n+8)(n+7)}=2\times\frac{\frac{8\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}}\times\frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}}{(n+8)(n+7)}$ إذن: $P(B_n)=\frac{16n}{n^2+15n+56}$. **- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}P(B_n)$:** لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{16n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{16n}{n^2+15n+56}=\lim\limits_{n\to+\infty}P(B_n)$ إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}P(B_n)=0$. **- تفسير النتيجة:** عندما يكون n كبير بالقدر الكافي، بمعنى يكون عدد الكريات السوداء كبير بالقدر الكافي، فيكون حادثة الحصول على كريتين من لونين مختلفين حادثة مستحيلة وَإحتماله مساويًا لـ 0.	0.25 0.25 0.25
التمرين الثالث: **1) حساب $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$:** لدينا: $\left(1+\sqrt{3}\right)^2=1+2\sqrt{3}+3=4+2\sqrt{3}$. **-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:** $z^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{1}{2}=0\ \ldots\ldots\ldots(E)$ نحسب المميّز Δ حيث: $\Delta=b^2-4ac=\left[-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2-4\times1\times\frac{1}{2}$، أي:	**(5ن)** 0.25

$\Delta=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{4}-2=\frac{4-2\sqrt{3}-8}{4}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{4}=-\frac{4+2\sqrt{3}}{4}$ $=i^2\times\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2^2}=\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i\right]^2$ بما أنّ: $\Delta\neq 0$، فإنّ: (E) تقبل حلين مترافقين: (بوضع: $\delta=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ أَوْ $\delta=-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$، حيث: $\delta^2=\Delta$). وَمنه: $\begin{cases} z'=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)i \\ z''=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)i \end{cases}$ إذن: $S=\left\{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)i;\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)i\right\}$.	0.25 0.25 0.25
2) نعتبر النقط A، B وَ C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B وَ z_C حيث : $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ وَ $z_C=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$. **أ-إثبات أنّ: $z_C=\frac{z_A}{z_B}$:** لدينا: $\frac{z_A}{z_B}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+3}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}=z_C$ ، إذن: $z_C=\frac{z_A}{z_B}$.	0.25
ب-كتابة كل من z_A وَ z_B على الشكل المثلثي: لدينا: $z_A=1+i$ ، وَمنه: $\begin{cases} r_A=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \arg(z_A)=\theta_A\to\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\to\theta_A=\frac{\pi}{4}+2\pi k;k\in\mathbb{Z} \end{cases}$، أي: $z_A=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$. إذن: $z_A=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$. -من جهة أخرى، لدينا: $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، وَمنه: $\begin{cases} r_B=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2 \\ \arg(z_B)=\theta_B\to\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\to\theta_B=-\frac{\pi}{3}+2\pi k;k\in\mathbb{Z} \end{cases}$ ، أي: $z_B=\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]$. إذن: $z_B=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
جـ -إستنتاج الشكل الأسي لـ z_C: بما أنّ: $z_A=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$ وَ $z_B=\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]$، (حسب خواص exp) $z_C=\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i}$ ، إذن: $z_C=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$.	0.25
دـ إستنتاج أنّ: $\tan\frac{7\pi}{12}=-2-\sqrt{3}$: نعلم أنّ: $\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}$، حيث: وَحسب السؤالين ب وَجـ ، فإنّ: $z_C=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$ ، وَبالمطابقة نجد أنّ:	

$\begin{cases}\frac{1-\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{12} \to \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7\pi}{12} \to \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\end{cases}$ ، وَمنه: $\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}$ علمًا أنّ: $\tan\frac{7\pi}{12} = \frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{\cancel{2}(2+\sqrt{3})}{-\cancel{2}}$، إذن: $\tan\frac{7\pi}{12} = -2-\sqrt{3}$. وَهو المطلوب.	0.25 0.25 0.25
3) لتكن D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة: $2i\sqrt{3}$. عبارة الانسحاب من الشكل: $z' = az + b$، وَبما أنّ التحويل عبارة عن إنسحاب فإنّ: $a = 1$، وَبما أنّ شعاعه ذو اللاحقة $2i\sqrt{3}$، فإنّ: $b = 2i\sqrt{3}$، إذن عبارة الانسحاب: $z' = z + 2i\sqrt{3}$. **أ- إثبات أنّ: $z_D = \bar{z}_B$:** لدينا: D صورة النقطة B بالإنسحاب، مما يعني أنّ: $z_D = z_B + 2i\sqrt{3}$. وَمنه: $z_D = 1 - i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3} = \bar{z}_B$ ، إذن: $z_D = \bar{z}_B$.	0.25
ب- إثبات أنّ: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (k \in \mathbb{Z})$: لدينا: $\frac{z_B}{z_D} = \frac{z_B}{\bar{z}_B}$ ، وَحسب خواص العمدة، فإنّ: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{\bar{z}_B}\right) = \arg(z_B) - \arg(\bar{z}_B) = -\frac{\pi}{3} - \left[-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$ إذن: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (k \in \mathbb{Z})$. - إستنتاج قيس الزاوية الموجهة: $(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}})$: لدينا: $(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}}) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_D - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right)$ وَحسب ما سبق فإنّ: $(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (k \in \mathbb{Z})$.	0.25
جـ - إثبات أنّ: $OD = OB$: لدينا: $OD = \lvert z_D - z_O\rvert = \lvert \bar{z}_B - z_O\rvert$ ، لأنّ: $z_D = \bar{z}_B$ ، (حسب - أ -)، وَحسب خواص الطويلة، فإنّ: $OD = \lvert z_D\rvert = \lvert \bar{z}_B\rvert = \lvert z_B\rvert = OB = 2$ ، إذن: $OD = OB$. - إستنتاج طبيعة المثلث OBD: بما أنّ: $OD = OB$ ، فإنّ: المثلث OBD متساوي الساقين.	0.25 0.25
د- إستنتاج صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وَزاويته $-\frac{2\pi}{3}$: بما أنّ: $OD = OB$ وَ $(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}}) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (k \in \mathbb{Z})$، فهذا يعني أنّ: صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وَزاويته $-\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة B.	0.25
التمرين الثالث: لتكن (u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$، وَمن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$. **1) أ- إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$:** - نضع الخاصية: $P(n): u_n > 0; n \in \mathbb{N}$: - من أجل $n = 0$، فإنّ: $u_0 = \frac{3}{2} > 0$ ، وَمنه: $P(0)$ محققة. -نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n، أي: $u_n > 0$. -نُحاول إثبات صحة الخاصية من أجل $(n+1)$، أي: $u_{n+1} > 0$ ؟ -لدينا فرضًا: $u_n > 0$ ، وَ $\sqrt{1+u_n} > 0$ ، وَمنه فإنّ: $\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$ ، أي: $u_{n+1} > 0$. إذن: وَحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ: $u_n > 0$.	**(4ن)** 0.25 0.25
ب- إثبات أنّ المتتالية (u_n) متناقصة: أي نثبت أنّه: $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n < 0$؟ لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} - u_n = \frac{u_n - u_n\sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}} = u_n\left(\frac{1-\sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}}\right)$ ، حيث: $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\frac{1-\sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}}\right)\times\frac{1+\sqrt{1+u_n}}{1+\sqrt{1+u_n}} = u_n \times \frac{1-1-u_n}{1+\sqrt{1+u_n}} = \frac{-u_n^2}{1+\sqrt{1+u_n}}$ ،	0.25

وَبما أنّ: $\forall n \in \mathbb{N};\ \begin{cases} -u_n^2 < 0 \\ 1+\sqrt{1+u_n} > 0 \end{cases}$، فإنّ: $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن: (u_n) متناقصة تمامًا على $\mathbb{N}$.	0.25
جـ- إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة: حسب -أ- فإنّ: $u_n > 0; \forall n \in \mathbb{N}$، مما يعني أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالصفر. وَحسب -ب- فإنّ: (u_n) متناقصة تمامًا على $\mathbb{N}$، إذن: (u_n) متقاربة حسب مبرهنة ما. **- حساب نهايتها:** بما أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، فهذا يعني أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ، مع ℓ عدد منته وَوحيد. أي: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ ، وَمنه وَبالتعويض في عبارة u_{n+1} نجد أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$ ، أي: $\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell}}$ ، وَبتربيع الطرفين: $\ell^2 = \frac{\ell^2}{1+\ell}$ ، وَمنه: $\ell^2\left(1-\frac{1}{1+\ell}\right) = \ell^2\left(\frac{1-1-\ell}{1+\ell}\right) = \frac{-\ell^3}{1+\ell} = 0 \to \ell = 0$ ، إذن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.	0.25 0.25 0.25
2) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة بحدّها الأول: $v_0 = 1$، وَبالعلاقة التراجعية: $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n}$. **أ-إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $v_{n+1} \ge \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$:** نُلاحظ أنّ: $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n} = v_n \times \frac{1}{u_n}$، حيث: $u_{0+1} = \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1+\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{نقلب الطرفين}} \frac{1}{u_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$. -من جهة أخرى: $u_1 \ge u_n > 0$ ، (لأنّ: (u_n) متناقصة حسب السؤال الثاني -أ-)، وَمنه: $\frac{1}{u_1} \le \frac{1}{u_n}$ أي: $\frac{1}{u_n} \ge \frac{1}{u_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ ، وَبضرب الطرفين في $v_n > 0$، نجد أنّ: $\frac{v_n}{u_n} \ge \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$. إذن: $v_{n+1} \ge \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$.	0.25 0.25 0.25
ب-البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $v_n \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$: - نضع الخاصية: $P(n): v_n \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1};\ n \in \mathbb{N}^*$ - من أجل $n = 1$، فإنّ: $v_1 = \frac{v_0}{u_0} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^0$، أي: $v_1 \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^0$ ، وَمنه: $P(1)$ محققة. -نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n، أي: $v_n \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$. -نُحاول إثبات صحة الخاصية من أجل $(n+1)$، أي: $v_{n+1} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n}$ ؟ -لدينا فرضًا: $v_n \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$ ، وَبضرب الطرفين في $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) > 0$، نجد أنّ: $v_n\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n}$ ، وَحسب - أ- فإنّ: $v_{n+1} \ge \frac{\sqrt{10}}{3} v_n \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n}$، وبالتعدي نجد أنّ: $v_{n+1} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n}$. -إذن: وَحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّ: $v_n \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0.25 0.25
جـ- حساب النهاية $\lim_{n\to+\infty} v_n$: حسب -ب- فإنّ: $v_n \ge \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$ ، وَمنه:	

$\lim_{n\to+\infty} v_n \geq \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1} = +\infty$ (حسب قاعدة المقارنة)، فإنّ: $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.	0.25
3) نضع: $S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1^2}+\frac{1}{v_2^2}+\frac{1}{v_3^2}+\cdots+\frac{1}{v_n^2}\right)$، حيث: $n \geq 1$. **أ-إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$، $\frac{1}{v_1^2}+\frac{1}{v_2^2}+\frac{1}{v_3^2}+\cdots+\frac{1}{v_n^2} \leq \frac{45}{2}\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$:** لدينا حسب السؤال الثاني -ب-: $v_n \geq \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$، وَمنه: $\frac{1}{v_n} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{n-1}$، وَبتربيع الطرفين نحصل على: $\left(\frac{1}{v_n}\right)^2 \leq \left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{n-1}\right]^2 = \frac{9}{4}\left[\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2\right]^{n-1} = \frac{9}{4}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{9}{4}\left(\frac{9}{10}\right)^n \times \frac{10}{9}$ أي: $\left(\frac{1}{v_n}\right)^2 \leq \frac{5}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^n$ ، حيث: -من أجل $n=1$، فإنّ: $\left(\frac{1}{v_1}\right)^2 \leq \frac{5}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^1$. -من أجل $n=2$، فإنّ: $\left(\frac{1}{v_2}\right)^2 \leq \frac{5}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^2$. --من أجل $n=3$، فإنّ: $\left(\frac{1}{v_3}\right)^2 \leq \frac{5}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^3$ . . . . . -من أجل $n-1$، فإنّ: $\left(\frac{1}{v_{n-1}}\right)^2 \leq \frac{5}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$. -من أجل n، فإنّ: $\left(\frac{1}{v_n}\right)^2 \leq \frac{5}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^n$. وَبجمع الأطراف، طرفًا لطرف، نحصل على: $\frac{1}{v_1^2}+\frac{1}{v_2^2}+\frac{1}{v_3^2}+\cdots+\frac{1}{v_n^2} \leq \frac{5}{2}\left[\left(\frac{9}{10}\right)^1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}+\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$ نضع: $S'_n = \left(\frac{9}{10}\right)^1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^n = t_1+t_2+\cdots+t_n$، وَ $t_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n$، فيكون: $t_{n+1} = \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} = \left(\frac{9}{10}\right)^n\left(\frac{9}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)t_n$ ، مما يعني أنّ: (t_n) متتالية هندسية أساسها: $q = \frac{9}{10}$ وَحدّها الأول: $t_1 = \frac{9}{10}$ ، وَبتطبيق قاعدة المجموع لحدود متتابعة من متتالية هندسية: $S'_n = t_1 \times \frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} = \frac{9}{10} \times \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \times 10 \times \left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right] = 9\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$ وَبالتعويض نحصل على: $\frac{1}{v_1^2}+\frac{1}{v_2^2}+\frac{1}{v_3^2}+\cdots+\frac{1}{v_n^2} \leq \frac{5}{2} \times 9\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$. إذن: $\frac{1}{v_1^2}+\frac{1}{v_2^2}+\frac{1}{v_3^2}+\cdots+\frac{1}{v_n^2} \leq \frac{45}{2}\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$ ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.	0.25 0.25 0.25
ب-إستنتاج $\lim_{n\to+\infty} S_n$: لدينا: $S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1^2}+\frac{1}{v_2^2}+\frac{1}{v_3^2}+\cdots+\frac{1}{v_n^2}\right)$ ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، وَحسب -أ- وَحسب مبرهنة الحصر، فإنّ: $\lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{45}{2n}\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right] = 0$ ، لأنّ: $\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\frac{45}{2n} = 0\\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n = 0\,;\, q = \frac{9}{10} \in]-1\,;1[\end{cases}$ ، إذن: $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$.	0.25
التمرين الرابع: نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$.	**(7ن)**

1) أ-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=+\infty$ ، أي: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 0.25

لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+\frac{5}{2})=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=-\infty$ ، أي: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ 0.25

لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{5}{2}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty\end{cases}$

ب- إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلًا (Δ) عند $(-\infty)$، يُطلب تعيين معادلة له:

نلاحظ أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-\frac{5}{2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=0$ 0.25

لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0\end{cases}$.

إذن: المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلًا $(\Delta): y=-x+\frac{5}{2}$ عند $(-\infty)$. 0.25

جـ - دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) وَالمستقيم (Δ): أي ندرس إشارة $f(x)-y$، حيث:

$f(x)-y=-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)=0\to e^{x-2}=4\to x-2=\ln 4$ ،

أي: $x=2+\ln 4$ ، لأنّ: $e^{x-2}\neq 0;\forall x\in\mathbb{R}$ ، أما إشارتها، فهي موضحة في الجدول أدناه: 0.25

x	$-\infty$		$2+\ln 4$		$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$		$-$	|	$-$	
$e^{x-2}-4$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	

0.25

وَعليه فإنّ: - (C_f) يقع أعلى (Δ) لما $x\in\,]-\infty;2+\ln 4[$.

- $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{\left(2+\ln 4;\frac{1}{2}+\ln 2\right)\right\}$. 0.25

- (C_f) يقع أسفل (Δ) لما $x\in\,]2+\ln 4;+\infty[$.

2) أ- حساب $f'(x)$، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f: f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع وَجداء دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$،

حيث: $f'(x)=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)-e^{x-2}\times\frac{1}{2}\times e^{x-2}$ ، أي:

$f'(x)=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}\times e^{x-2}+2e^{x-2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\times e^{x-2}$، وَمنه:

$f'(x)=-1+2e^{x-2}-(e^{x-2})^2$، إذن: $f'(x)=-(e^{x-2}-1)^2$. 0.25

ب-إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f:

حسب عبارة $f'(x)$، فإنّ: $f'(x)\leq 0;\forall x\in\mathbb{R}$ ، لأنّ:

$\begin{cases}-1<0\\ (e^{x-2}-1)^2\geq 0\,;\forall x\in\mathbb{R}\\ e^{x-2}-1=0\to e^{x-2}=1\to x-2=\ln 1\to x=2\end{cases}$

إذن: f متناقصة تمامًا على $\mathbb{R}$. 0.25

- تشكيل جدول تغيّراتها:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$		$f(2)$		$-\infty$

0.25

حيث: $f(2) = -2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2-2}(e^{2-2} - 4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

جـ إثبات أنّ (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها: حسب السؤال الثاني -أ- فإنّ:

$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$، وَ f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كتركيب دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، 0.25

حيث: $f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)^{2-1} = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$.

وَمنه: $f''(x) = 0$ ، أي: $e^{x-2} - 1 = 0$ ، فيكون: $x - 2 = \ln 1 \to x = 2$ ،

(لأنّ: $-2e^{x-2} < 0\,; \forall x \in \mathbb{R}$). وَتكون إشارة $f''(x)$ كما هي موضحة في الجدول أدناه:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-2e^{x-2}$		$-$		$-$	
$e^{x-2} - 1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

0.25

مما يعني أنّ: $f''(x)$ إنعدمت من أجل $x_0 = 2$ وَغيّرت إشارتها،

إذن: (C_f) يقبل نقطة إنعطاف هي $A(2;2)$. 0.25

3) إثبات أنّ المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$:

f معرّفة وَمستمرة وَمتناقصة على $[2 + \ln 3; 2 + \ln 4]$، حيث: 0.25 0.25

$$\begin{cases} f(2+\ln 3) = -2 - \ln 3 + \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}e^{2+\ln 3-2}\left(e^{2+\ln 3-2} - 4\right) = 2 - \ln 3 = 0.901 \\ f(2+\ln 4) = -2 - \ln 4 + \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}e^{2+\ln 4-2}\left(e^{2+\ln 4-2} - 4\right) = \dfrac{1}{2} - \ln 4 = -0.886 \end{cases}$$

0.25

أي: $f(2+\ln 3) \times f(2+\ln 4) < 0$ ، وَمنه وَحسب مبرهنة القيّم المتوسطة فإنّه يوجد حل وحيد 0.25

α حيث: $\alpha \in]2 + \ln 3; 2 + \ln 4[$ يُحقّق: $f(\alpha) = 0$.

4) إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسًا (T) يُوازي المقارب المائل (Δ)، يُطلب تعيين معادلة له:

أي نُثبت أنّ: $f'(x_0) = -1$ ، حيث: $f'(x_0) = -(e^{x_0-2} - 1)^2 = -1$ ، وَمنه: 0.25

$(e^{x_0-2} - 1)^2 = 1$ ، أي: $|e^{x_0-2} - 1| = 1$، وَمنه:

$$\begin{cases} e^{x_0-2} - 1 = -1 \to e^{x_0-2} = 0 \text{،(مستحيل)،} e^{x_0-2} > 0; \forall x_0 \in \mathbb{R} \\ e^{x_0-2} - 1 = 1 \to e^{x_0-2} = 2 \to x_0 - 2 = \ln 2 \to x_0 = 2 + \ln 2 \end{cases}$$

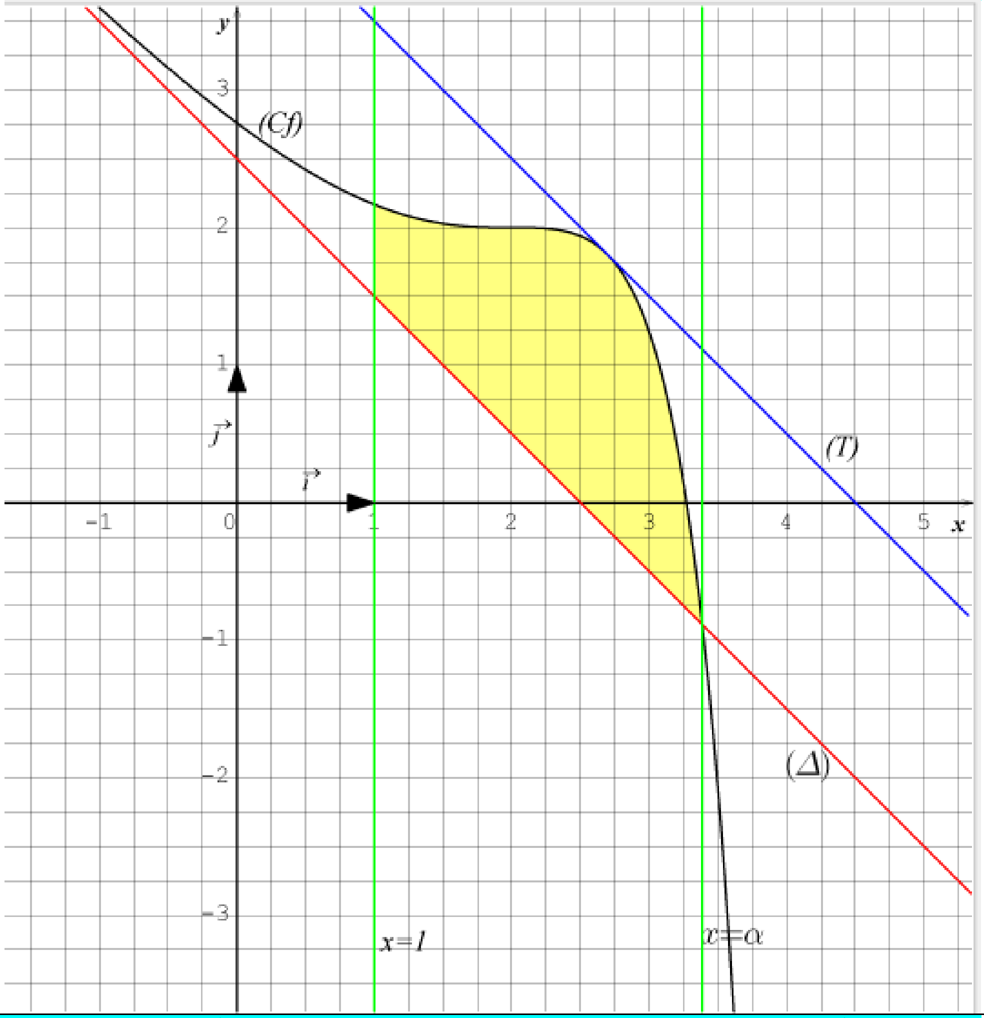
إذن: المنحنى (C_f) يقبل مماسًا (T) يُوازي المقارب المائل (Δ) عند $x_0 = 2 + \ln 2$. 0.25

$(T): y = f'(2+\ln 2)(x - 2 - \ln 2) + f(2+\ln 2)$، حيث:

$$\begin{cases} f'(2+\ln 2) = -1 \\ f(2+\ln 2) = -2 - \ln 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 2-2}\left(e^{2+\ln 2-2} - 4\right) = \frac{5}{2} - \ln 2 \end{cases}$$

وَمنه: $(T): y = -(x - 2 - \ln 2) + \frac{5}{2} - \ln 2 = -x + 2 + \ln 2 + \frac{5}{2} - \ln 2$

إذن: $(T): y = -x + \frac{9}{2}$. 0.25

5) رسم كلا من (Δ) ، (T) وَ (C_f): 	0.25 0.25 0.25
6) المناقشة حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$: هي فواصل نقطة تقاطع البيان (C_f) مع المستقيمات المائلة: $(\Delta_m): y = -x + m$، حيث: -لما $m \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$: يوجد حل وحيد موجب. - لما $m \in \left]\frac{5}{2}; \frac{11}{4}\right[$: حلان مختلفان في الإشارة. -لما $m = \frac{11}{4}$: حل معدوم وآخر موجب. -لما $m \in \left]\frac{11}{4}; \frac{9}{2}\right[$: حلان موجبان مختلفان. -لما $m = \frac{9}{2}$: حل وحيد موجب هو $x = 2$. -لما $m \in \left]\frac{9}{2}; +\infty\right[$: لا توجد حلول.	0.25 0.25
7) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وَبالمستقيمات: $y = -x + \frac{5}{2}$، $x = 1$ وَ $x = \alpha$. حساب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α: بما أنّ المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) على $]1; \alpha[$، فإنّ: $\mathcal{A}(\alpha) = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \int_1^\alpha [f(x) - y]dx = 4\int_1^\alpha \left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)\right] dx$ ، حيث: $\mathcal{A}(\alpha) = 4\int_1^\alpha \left[-\frac{1}{2}e^{2x-4} + 2e^{x-2})\right] dx = 4[-e^{2x-4} + 2e^{x-2}]_1^\alpha$ ، إذن: $\mathcal{A}(\alpha) = 4(-e^{2\alpha-4} + 2e^{\alpha-2} + e^{-2} - 2e^{-1}).cm^2$.	0.25 0.25 0.25